С. А. АШМАНОВ

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

С. А. АШМАНОВ

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебного пособия для студентов вузов обучающихся по специальности «Прикладная математика»

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1981

22.18
А 98
УДК 519.6

Линейное программирование. Ашманов С. А.— М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981.— 340 с.

В книге излагаются основные разделы теории и численные методы решения задач линейного программирования. Значительное место уделяется качественному исследованию свойств содержательных моделей методами линейного программирования. Основной материал сопровождается упражнениями теоретического характера. Табл. 19. Илл. 35. Библ. 28 назв.

Станислав Александрович Ашманов

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Редакторы *А. Д. Вайнштейн, Е. Ю. Ходан.*

Техн. редактор *С. Я. Шкляр.*

Корректоры *О. Н. Бутусова, О. М. Кривенко.*

ИБ № 11858

Сдано в набор 31.12.80. Подписано к печати 12.06.81. Формат 84×108 1/32. Бумага тип. № 3. Обыкновенная гарнитура. Высокая печать. Условн. печ. л. 15,96. Уч.-изд. л. 16,5. Тираж 44 000 экз. Заказ № 410. Цена 70 коп.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

4-я типография изд-ва «Наука».
630077, Новосибирск, 77, Станиславского, 25.

$А\,\frac{20204-080}{053(02)-81}$ 1-81, 1502000000,

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данная книга представляет собой учебное пособие по линейному программированию, рассчитанное на студентов и аспирантов высших учебных заведений по специальностям математика, прикладная математика, экономическая кибернетика, а также на инженеров, пользующихся математическим моделированием как средством исследования реальных процессов.

Изучение свойств систем линейных неравенств ведется, по-видимому, очень давно. Выделение класса экстремальных задач, определяемых линейным функционалом на множестве, задаваемом линейными ограничениями, следует отнести к 30-м годам нашего столетия. Одними из первых, исследовавшими в общей форме задачи линейного программирования, были: Джон фон Нейман, знаменитый математик и физик, доказавший основную теорему о матричных играх и изучивший экономическую модель, носящую его имя; советский академик, лауреат Нобелевской премии Л. В. Канторович, сформулировавший ряд задач линейного программирования и предложивший метод их решения, незначительно отличающийся от симплекс-метода. Публикации основных его работ помешала война, и книга вышла в свет только в 1959 г.

Первая постановка транспортной задачи предложена в 1930 г. советским ученым А. Н. Толстым. М. К. Гаврин вместе с Л. В. Канторовичем разрабатывал методы решения задач линейного программирования. В годы войны пробудился интерес к задачам линейного программирования в США. Симплекс-метод разработан Дж. Данцитом при дальнейшем участии А. Чарнса, Л. Форда и Д. Фалкерсона. Теорема двойственности доказана Д. Гейлом, Г. У. Куном и А. У. Таккером на основе идей Дж. фон Неймана.

Накопленный опыт применения линейного программирования показывает, что наряду с разработкой эффективных вычислительных приемов решения линейных задач все большую роль приобретают качественные методы исследования свойств задач линейного программирования. В связи с этим в книге уделяется несколько большее внимание данному вопросу, чем обычно.

Книга состоит из восьми глав.

Глава I носит вводный характер. В ней обсуждаются некоторые общие вопросы моделирования, рассматриваются примеры содержательных проблем, приводящих к задачам линейного программирования. Поначалу на примерах подробно описывается методика формализации содержательных задач, что позволяет читателю освоиться с переходом к векторно-матричным обозначениям. При обсуждении формализованных моделей обращается внимание не только на их достоинства, но и на ограниченность, что должно предостеречь читателя от абсолютизации математических выводов и рекомендаций.

Глава II посвящена теории выпуклых многогранных множеств. По этому поводу скажем, что хотя изложение двойственности и симплекс-метода при желании можно провести, не опираясь на указанную теорию, все же, по нашему мнению, глубокое понимание свойств задач линейного программирования невозможно без знания структуры многогранных множеств. Автор приложил максимум усилий, чтобы сделать материал главы доступным. Основные понятия и факты иллюстрируются примерами и рисунками, позволяющими осознать на геометрическом наглядном материале (в основном на плоскости, реже в трехмерном пространстве) основные идеи. Предварительное обсуждение каждого факта делает его интуитивно очевидным, так что в ряде случаев (их немного) читатель, не привыкший к абстрактным математическим доказательствам, может опустить их без ущерба для понимания существа дела.

В главе III формулируется и доказывается основной результат — теоремы двойственности в линейном программировании.

Глава IV представляет собой раздел, в котором проводится качественный анализ решений некоторых из содержательных моделей и указываются другие сферы применения теории двойственности. Так, здесь доказывается теорема о магистрали в динамической модели Леонтьева с обсуждением содержательного смысла этого важного результата, теорема о замещении в динамической модели межотраслевого баланса. Наряду с классическим примером использования теории двойственности — доказательством теоремы фон Неймана о матричных играх,— приведены факты о свойствах множества решений в играх n лиц, причем использование теории двойственности делает все доказательства здесь особенно простыми. Отметим также доказательство теоремы Фробениуса — Перрона о свойствах неотрицательных матриц. Доказывается дискретный принцип максимума для линейных задач.

В главе V излагается симплекс-метод численного решения задач линейного программирования.

Глава VI преследует цель подготовить читателя к применению симплекс-метода для исследования целочисленных задач линейного программирования. Здесь описывается иной способ организации числовой информации — так называемая симплексная таблица в координатной форме. На этой основе излагается метод решения лексикографических задач линейного программирования, что затем также используется при обосновании алгоритма Гомори решения целочисленных задач.

Глава VII предназначена продемонстрировать, как преобразуется основная вычислительная схема симплекс-метода при решении специфических классов задач. Основным примером служит классическая транспортная задача.

После теоретического рассмотрения несложной теории транспортных сетей показано, как симплексный вычислительный алгоритм в данном случае сводится к выполнению ряда логических операций по поиску циклов в сети. Большой раздел посвящен целочисленным задачам линейного программирования с изложением содержательных моделей (задача о коммивояжере, задача о ранце и т. п.).

Последняя глава VIII дает понятие о трудностях, возникающих в связи с возможной некорректностью задачи линейного программирования. Обсуждается вопрос о важности этого момента, ввиду приближенности любой статистической информации к реальной задаче. Приводятся методы регуляризации подобных задач, основанные на идеях А. Н. Тихонова.

Весь материал сопровождается упражнениями.

Автор приносит благодарность всему коллективу кафедры исследования операций Московского государственного университета, принимавшему активное участие в работе над книгой.

С. А. Ашманов

ГЛАВА I. ЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ

§ 1. Линейное программирование — инструмент исследования линейных моделей

Линейное программирование является составной частью раздела математики, который изучает методы нахождения условного экстремума функций многих переменных и называется *математическим программированием.* В классическом математическом анализе рассматривается задача отыскания условного экстремума функции. Тем не менее, время показало, что для многих задач, возникающих под влиянием запросов практики, классические методы недостаточны. В связи с развитием техники, ростом промышленного производства и с появлением электронных вычислительных машин все большую роль начали играть задачи отыскания оптимальных решений в различных сферах человеческой деятельности. Основным инструментом при решении этих задач стало математическое моделирование — формальное описание изучаемого явления и исследование с помощью математического аппарата.

Остановимся на некоторых основных проблемах моделирования. Всякая модель реального процесса предполагает идеализацию и абстракцию: следует в той или иной степени упростить постановку задачи и отвлечься от ее специфики. Когда в школьном учебнике рассматривается задача о том, как поезд движется из пункта A в пункт $Б$, то уже такая несложная модель иллюстрирует сказанное. В самом деле, если предполагается, что поезд движется с постоянной скоростью, то это есть идеализация; подобного в жизни почти не бывает. Вместе с тем, решая задачу, школьник абстрагируется от ее содержания: если в следующий раз ему встретится не поезд, а автомобиль, он применит тот же способ решения, не смущаясь разницей между средствами передвижения.

Идеализация и абстракция не должны уходить слишком далеко от содержания задачи, чтобы построенная модель не утратила существенных черт моделируемого объекта, т. е. была ему адекватна. С другой стороны, если построить сложную модель, учитывающую все тончайшие особенности изучаемого процесса, то это может нарушить смысл моделирования, одна из целей которого — упростить постановку задачи, чтобы легче было ее исследовать (слишком сложная модель, как правило, не поддается анализу). Искусство математического моделирования (и моделирования вообще) состоит в том, чтобы учесть как можно больше факторов по возможности простыми средствами. Именно в силу этого процесс моделирования часто носит итеративный характер. На первой стадии строится относительно простая модель и проводится ее исследование, позволяющее понять, какие из существенных свойств изучаемого объекта не улавливаются данной формальной схемой. Затем происходит уточнение, усложнение модели.

В большом числе случаев первой степенью приближения к реальности является модель, в которой все зависимости между переменными, характеризующими состояние объекта, предполагаются линейными. Здесь имеется полная аналогия с тем, как весьма важная и зачастую исчерпывающая информация о поведении произвольной функции получается на основе изучения ее производной — происходит замена этой функции в окрестности каждой точки линейной зависимостью. Значительное количество экономических, технических и других процессов достаточно хорошо и полно описывается линейными моделями.

Сказанным определяется важность той роли, которую играет линейное программирование — метод отыскания условного экстремума линейной функции на множестве, заданном при помощи линейных соотношений типа равенств и неравенств (линейных ограничений).

§ 2. Примеры линейных моделей

В этом параграфе приводится несколько достаточно распространенных простых моделей, отражающих ту или иную реальную ситуацию. Все эти модели можно отнести к разряду экономико-математических, поскольку в них присутствует экономический показатель — стоимость. Это можно объяснить современным положением дел: линейное программирование получило распространение в основном как инструмент исследования именно экономико-математических моделей.

Особенно подробно разбирается первая из рассматриваемых моделей — задача о диете. Это позволяет читателю освоиться с методикой формализации содержательных задач, с переходом к матрично-векторным обозначениям. После изложения каждой модели проводится обсуждение степени ее адекватности исходной содержательной ситуации. Мы намеренно акцентируем внимание читателя на основных недостатках абстрактных формулировок, составляющих содержание математической модели, чтобы предостеречь его от чрезмерной абсолютизации дальнейших выводов.

1. Задача о диете. Рассмотрим задачу составления наиболее экономного (т. е. наиболее дешевого) рациона питания, удовлетворяющего определенным медицинским требованиям. Подобная задача возникает в связи с необходимостью обеспечить питанием большое количество людей, например, в армии, в санатории и т. д. Предполагается, что известен перечень доступных продуктов из n наименований (хлеб, сахар, масло, молоко, картофель и т. д.), которые мы будем обозначать буквами F_1, F_2, ..., F_n. Кроме того, рассматриваются такие характеристики продуктов, как витамины, минеральные вещества, жиры, белки, углеводы, калорийность и т. д. Обозначим эти компоненты буквами N_1, N_2, ..., N_m. Предположим, что для каждого продукта F_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, известна его медицинская характеристика, т. е. количественное содержание в одной единице (килограмме, грамме) продукта указанных компонент. В таком случае можно составить таблицу-справочник, содержащую характеристики продуктов:

	F_1	F_2	...	F_j	...	F_n
N_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1j}	...	a_{1n}
N_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2j}	...	a_{2n}
$\vdots$	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
N_i	a_{i1}	a_{i2}	...	a_{ij}	...	a_{in}
$\vdots$	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
N_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mj}	...	a_{mn}.

Элементы этой таблицы образуют матрицу, имеющую m строк и n столбцов. Обозначим ее через A и назовем *матрицей питательности.*

Допустим, что мы составили рацион $x=(x_1, x_2, \ldots \ldots, x_n)$ на некоторый срок (например, месяц). Другими словами, мы планируем каждому человеку на месяц x_1 единиц (килограммов, граммов) продукта F_1, x_2 единиц продукта F_2 и т. д. Нетрудно вычислить, какое количество витаминов, жиров, белков и т. п. получит человек за этот срок. Именно, компонента N_1 присутствует в этом рационе в общем количестве

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n,$$

поскольку в x_1 единиц продукта F_1, согласно матрице питательности, содержится $a_{11}x_1$ единиц компоненты N_1; к этому количеству добавляется порция $a_{12}x_2$ вещества N_1 из x_2 единиц продукта F_2 и т. д. Аналогично можно определить и количества всех остальных веществ N_i в составленном рационе $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Допустим, далее, что имеются вполне определенные медицинские требования, касающиеся необходимого человеку количества каждой из компонент N_i, $i=1, 2, \ldots, m$, в планируемый срок. Например: количество витамина C не должно быть меньше заданного (чтобы не было цинги), количество калорий должно быть не меньше такого-то числа и т. д. Выразим эти требования вектором $b=(b_1, b_2, \ldots, b_m)$, i-я координата которого b_i указывает минимально необходимое содержание компоненты N_i в рационе. Это означает, что координаты x_i вектора x должны удовлетворять следующей системе ограничений:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &\geqslant b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &\geqslant b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &\geqslant b_m. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Кроме того, хотя из смысла задачи очевидно, что все переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ неотрицательны, в процессе формализации нашей содержательной ситуации этот факт необходимо учесть, поскольку в процессе решения задачи на ЭВМ информация о смысле всех участвующих величин не может быть учтена самой ЭВМ. Таким образом, к ограничениям (1.1) добавляются неравенства

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0. \tag{1.2}$$

Пока ясно, что любой рацион, который может быть предложен в качестве меню на рассматриваемый срок, обязан удовлетворять условиям (1.1) и (1.2). Но таких рационов может быть бесконечно много. Для того чтобы выбрать какой-то из них, врач уступает место бухгалтеру.

Пусть цены на продукты $F_1, F_2, \ldots, F_n$ равны соответственно $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Следовательно, стоимость всего рациона $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ может быть записана в виде

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n. \tag{1.3}$$

Окончательная формулировка задачи о диете такова: среди всех векторов $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющих ограничениям (1.1), (1.2), выбрать такой, для которого выражение (1.3) принимает минимальное значение.

На этом процесс формализации содержательной задачи о составлении рациона закончен. Далее можно лишь приводить выражения (1.1)—(1.3) к более удобному виду. Вспомнив правило умножения матрицы на вектор, видим, что каждое из m выражений, стоящих в левой части неравенств (1.1), представляет собой координату вектора Ax, где A — матрица питательности. Пусть $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$, $v = (v_1, v_2, \ldots, v_m)$ — два вектора одинаковой размерности (с одинаковым числом координат). Условимся писать $u \geqslant v$, если $u_1 \geqslant v_1, u_2 \geqslant v_2, \ldots, u_m \geqslant v_m$. Тогда систему неравенств (1.1) можно переписать следующим образом:

$$Ax \geqslant b.$$

Запись $x \geqslant 0$ будет означать, что все координаты вектора $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ неотрицательны. Накопец, выражение $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ можно записать в виде скалярного произведения двух векторов $\langle c, x\rangle$, где $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$.

Используя эти обозначения, задачу отыскания наиболее дешевой диеты можно кратко выразить в следующей матрично-векторной форме:

$$\begin{gathered} \min \langle c, x\rangle \\ Ax \geqslant b, \quad x \geqslant 0. \end{gathered} \tag{1.4}$$

Обсудим достигнутый результат. Мы выразили достаточно реальную задачу в строгой математической форме, что в дальнейшем позволит для ее решения применить весь богатый арсенал математических методов. С другой стороны, в формулах (1.1)—(1.4) мы уже полностью абстрагировались от содержательного смысла задачи, и если выяснится, что при составлении модели (1.4) были упущены некоторые важные с содержательной точки зрения моменты, то никакая математика не спасет нас от получения бессмысленных результатов. Ясно, например, что модель (1.4) отражает не все стороны той реальной задачи, которую она призвана заменить. Так, медицинские ограничения по необходимому количеству компоненты N_i в рационе могут носить и иной характер: это количество не должно превышать заданного. Правда, следует сказать, что это дополнительное требование нетрудно учесть, и при этом вид задачи (1.4) изменится незначительно. Кроме того, можно отметить, что в ограничениях (1.1) и при минимизации функции (1.3) учтены лишь требования врача и экономиста, в то время как вкусы человека, для которого составляется этот рацион, здесь никак не фигурируют. В модели (1.4) не заложено условие, что рацион (диета) должен быть съедобным. Расскажем лишь об одной попытке составления дешевой диеты.

В 1945 г. в [11] было опубликовано сообщение о результатах решения задачи о диете с конкретными числовыми характеристиками. Рассматривалось 77 видов продуктов и 9 компонент, таких, как витамин А, белки, углеводы и т. п. Рассчитывалась диета для питания одного человека в течение года. С помощью симплекс-метода (см. гл. V) было получено оптимальное решение задачи. В силу особенностей симплекс-метода это решение необходимо включало в себя лишь 9 из имеющихся 77 видов продуктов. Вот эти 9 продуктов: пшеничная мука, кукуруза, сгущенное молоко, растительное масло, сало, говяжья печень, капуста, картофель и шпинат. Оптимальная диета, составленная из перечисленных продуктов, стоила 39 долларов 67 центов в ценах 1939 г. и была абсолютно безвкусной, а поэтому и неприемлемой. В то же время диета, составленная врачом-диетологом, будучи вполне разумной, стоила 115 долларов.

Несмотря на всю поучительность этого неудавшегося опыта, не следует думать, что изложенная модель составления рациона не может дать подходящего решения задачи. Во-первых, в число ограничений модели можно включить условия, ограничивающие объем потребления каждого продукта, условия, учитывающие совместимость различных продуктов. Во-вторых, если применить метод решения, свободный от некоторых недостатков симплекс-процедуры, можно получить оптимальное решение, включающее более богатый ассортимент.

Существует, однако, много ситуаций из других областей, в которых основная изложенная нами модель задачи о диете применима без каких-либо изменений в формулировке и в стандартном методе решения. Например, эта модель с успехом была применима для отыскания рациона минимальной стоимости для крупного рогатого скота [12]. Известны удачные попытки составления таких смесей нефтепродуктов, которые, удовлетворяя определенным техническим требованиям (заданное октановое число, летучесть и др.), оказываются самыми дешевыми. Эти примеры позволяют надеяться на расширение области применения задачи о диете.

2. Транспортная задача. Имеется m пунктов $S_1, S_2, \ldots$ $\ldots, S_m$ производства однородного продукта (угля, цемента и т. п.), причем объем производства в пункте S_i равен a_i единиц. Произведенный продукт потребляется в пунктах $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, и потребность в нем в пункте Q_j составляет b_j единиц, $j = 1, 2, \ldots, n$. Требуется составить план перевозок из пунктов S_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, в пункты Q_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, чтобы удовлетворить потребности в продукте b_j, не допустить затоваривания пунктов производства и минимизировать транспортные расходы.

Пусть стоимость перевозок одной единицы (например, тонны) продукта из пункта S_i в пункт Q_j равна c_{ij}. Накладывая условия линейности, будем считать, что при перевозке x_{ij} единиц продукта из S_i в Q_j транспортные расходы равны $c_{ij}x_{ij}$.

Назовем *планом перевозок* набор чисел (x_{ij}), $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$, удовлетворяющий ограничениям

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \\ x_{ij} \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, n.\end{gathered} \tag{1.5}$$

Содержательный смысл уравнений (1.5) ясен: из пункта S_i при плане (x_{ij}) вывозится во все пункты Q_j объем $\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$, который должен быть равен как раз запасу a_i. В пункт Q_j поступает из всех пунктов S_i суммарное количество $\sum_{i=1}^{m} x_{ij}$ продукта; требуется, чтобы оно в точности отвечало потребности b_j. При плане перевозок (x_{ij}) транспортные расходы составят величину

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_{ij}. \tag{1.6}$$

Окончательная формулировка транспортной задачи такова: среди всех наборов чисел (x_{ij}), удовлетворяющих ограничениям (1.5), найти набор, минимизирующий (1.6).

Транспортная задача (и ее модификации) оказалась первой из задач линейного программирования, примененной в широких масштабах на практике в нашей стране. Приведем лишь краткие сведения об отдельных результатах. Еще в 1959 г. (см. [13]) была предпринята попытка решения задачи закрепления потребителей однородного груза за поставщиками с целью снижения среднего расстояния перевозки. На ЭВМ «Стрела» была решена задача закрепления за 8 речными причалами г. Москвы 209 потребителей таких грузов, как песок, щебень, гравий, уголь и др.; итоги показали, что с помощью оптимального плана среднее расстояние перевозок может быть снижено на 11,3%, и это может дать существенный экономический эффект.

К настоящему времени масштабы применения транспортной задачи значительно выросли. Так, ВЦ Главмостранса на основе построенной сетевой модели городских транспортных связей с учетом всех правил уличного движения ежедневно решает большое число задач оперативного планирования перевозок строительных и других промышленных материалов (железобетона, кирпича, песка, керамзита, металла, угля, нефти), перевозок мебели с фабрик по мебельным магазинам, развозки по магазинам молока, хлеба, мяса и т. д.

3. Модель рационального использования посевных площадей. Имеется m земельных угодий $S_1, S_2 \ldots, S_m$, предназначенных для засева той или иной сельскохозяйственной культурой. Эти площади отличаются либо положением, либо характером почвы. На каждом из угодий (полей) S_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, могут быть размещены одна или несколько из n сельскохозяйственных культур $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ (пшеница, рожь, кукуруза, картофель и т. д.). Пусть известна урожайность культуры Q_j на поле S_i; она равна a_{ij} центнеров с гектара. Будем обозначать площадь поля S_i в гектарах через a_i. Ограничения в этой задаче таковы:

задан план производства b_j каждой сельскохозяйственной культуры Q_j. Известны закупочные цены c_j на каждый вид Q_j продукции. Требуется определить план засева посевных площадей с целью максимизации дохода от продажи сельскохозяйственной продукции.

Пусть x_{ij} — площадь (в гектарах) на i-м поле, занятая культурой Q_j. Тогда математическая модель задачи рационального использования посевных площадей такова:

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \qquad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_{ij} \geqslant b_j,$$

$$x_{ij} \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

4. Составление плана производства. Рассматривается деятельность некоторой производственной единицы (завода, цеха). Требуется составить план производства, обеспечивающий в максимальной степени выполнение задания. Относительно данной производственной единицы известны ее технологические возможности, а также количества сырьевых ресурсов, которые можно использовать. Пусть число всех видов ресурсов равно m; обозначим их $R_1, R_2, \ldots, R_m$. Это могут быть: металл, электроэнергия, различные виды поставок с других предприятий. Допустим, что на нашем производстве могут выпускаться n типов товаров $G_1, G_2, \ldots, G_n$.

Технологией производства товара G_j назовем набор чисел (a_{ij}), $i = 1, 2, \ldots, m$, показывающих, какие количества ресурсов R_i необходимы для выпуска одной единицы товара G_j. Так, производство товара G_1 можно мыслить как конвейер, на всем протяжении которого подаются ресурсы в количествах $a_{11}, a_{21}, a_{31}, \ldots, a_{m1}$, а на конце конвейера выходит готовая единица продукта G_1.

Можно составить *технологическую матрицу*

	G_1	G_2	$\ldots G_j$	$\ldots G_n$
R_1	a_{11}	a_{12}	$\ldots a_{1j}$	$\ldots a_{1n}$
R_2	a_{21}	a_{22}	$\ldots a_{2j}$	$\ldots a_{2n}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
R_i	a_{i1}	a_{i2}	$\ldots a_{ij}$	$\ldots a_{in}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
R_m	a_{m1}	a_{m2}	$\ldots a_{mj}$	$\ldots a_{mn}$

которая полностью описывает технологические возможности производства. Обозначим ее через A.

Пусть заданы количества b_i ресурсов R_i, $i=1, 2, \ldots$ $\ldots, m$, которые могут быть использованы в производстве; положим $b=(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ (*вектор ресурсов*). Назовем *планом производства* вектор $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, показывающий, какие количества товаров $G_1, G_2, \ldots, G_n$ будут произведены.

Будем считать технологию производства линейной, т. е. предположим, что все затраты ресурсов растут прямо пропорционально объему выпуска. Более точно, допустим, что затраты при выпуске x_j единиц продукта G_j описываются вектором $(a_{1j}x_j, a_{2j}x_j, \ldots, a_{mj}x_j)$, причем одновременное функционирование нескольких технологических процессов приводит к суммарным затратам.

Таким образом, затраты ресурсов, необходимые для выполнения плана производства $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, описываются вектором, координаты которого имеют вид

$$
\begin{gathered}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n,\\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n,\\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n,
\end{gathered}
$$

или, в матричной форме, вектором Ax. Условие ограниченности ресурсов записывается в виде $Ax \leqslant b$. Следовательно, при заданном векторе ресурсов b рассматриваемой производственной единицей может быть выпущен любой набор товаров x, удовлетворяющий ограничениям $Ax \leqslant b$, $x \geqslant 0$. Как правило, такой вектор x не единствен. В связи с этим появляется возможность выбора наилучшего (в некотором смысле) плана.

Рассмотрим две возможные постановки оптимизационной задачи. Пусть заданы цены $c=(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ на продукты производства $G_1, G_2, \ldots, G_n$. Требуется определить план производства, максимизирующий стоимость выпущенной продукции. Формальная запись этой задачи такова:

$$
\begin{gathered}
\max\langle c, x\rangle\\
Ax \leqslant b, \quad x \geqslant 0.
\end{gathered}
\tag{1.7}
$$

Подобная постановка вопроса соответствует принципу планирования «по валу». Тот случай, когда планирование выпуска ведется «по номенклатуре», можно смоделировать иначе. Пусть задан вектор $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n)$, определяющий один комплект выпуска; требуется выпустить как можно больше таких комплектов. Пусть α означает число выпускаемых комплектов. Рассмотрим задачу

$$\begin{gathered} \max \alpha \\ Ax \leqslant b, \quad x \geqslant \alpha\hat{x}, \quad x \geqslant 0. \end{gathered} \tag{1.8}$$

Здесь неравенство $x \geqslant \alpha\hat{x}$ означает, что вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ содержит не меньше α полных комплектов $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n)$ выпускаемой продукции.

Модели (1.7) и (1.8), хотя несомненно и отражают определенные черты реального производства, являются тем не менее сильно идеализированными. Так, в них отсутствует такое важное для производства понятие, как время. Считается также, что все необходимые ресурсы R_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, в нужный момент находятся под рукой. Тем самым мы абстрагировались от острых проблем динамики производства и ритмичности поставок. Кроме того, в построенных моделях не учитываются затраты живого труда и целый ряд других показателей, являющихся непременным атрибутом реального производства.

5. Динамическая модель планирования. Основой многих линейных моделей производства являются схемы межотраслевого баланса. Не останавливаясь подробно на истории возникновения этого метода изучения структуры народного хозяйства, скажем только, что его идея впервые в явном виде была сформулирована в работах советских экономистов 20-х гг. и получила затем развитие в изучении структуры американской экономики (см. [14]).

Схеме межотраслевого баланса и ее различным модификациям посвящена обширная литература. Для обстоятельного знакомства с ней мы можем рекомендовать книги [15—17]; здесь же будет изложен упрощенный вариант схемы с сохранением основного математического содержания.

Пусть весь производственный сектор народного хозяйства разбит на n «чистых» отраслей, т. е. продукция каждой из этих отраслей предполагается однородной. Чистая отрасль есть некая экономическая абстракция, не обязательно существующая реально в виде каких-либо организационных форм типа министерства, треста, объединения.

Так, под отраслью «электроэнергетика» можно понимать совокупность всех электростанций вне зависимости от их ведомственной принадлежности. Несомненно, что включение в схему межотраслевого баланса только чистых отраслей затрудняет его непосредственное применение, поскольку на практике планирование и отчетность осуществляются в рамках существующих организационных структур. Однако подобная идеализация оправдана тем, что, с одной стороны, она позволяет провести детальный анализ сложившейся технологической структуры общественного производства и распределения, а с другой — тем, что опыт, накопленный при изучении данной упрощенной схемы, привел к построению более содержательных моделей.

Возвращаясь к описанию схемы межотраслевого баланса, предположим, что каждая отрасль выпускает продукт только одного типа и разные отрасли выпускают разные продукты. Таким образом, в рассматриваемой нами производственно-экономической системе выпускается n видов продуктов. В процессе производства своего вида продукта каждая отрасль нуждается в продукции других отраслей.

Допустим теперь, что в некоторый момент времени, скажем, в году T_0, по итоговым данным составлен балансовый отчет по народному хозяйству за фиксированный период времени (например, за прошедший год) по форме, приведенной в табл. 1. Величины $\bar{a}_{ij}$ указывают объем продукта с номером i, израсходованный отраслью j в процессе производства за отчетный период. Числа $\bar{V}_j$ равны общему объему продукции (валовому выпуску) j-й отрасли за тот же период, а значения $\bar{c}_j$ — объему продукции j-й отрасли, который был потреблен в непроизводственной сфере, для создания запасов и т. д. Числа $\bar{a}_{ij}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, показывают распределение продукта i на производственные нужды всех отраслей.

Балансовый характер этой таблицы выражается в том, что должны выполняться соотношения

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{ij} = \bar{V}_i - \bar{c}_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Единицы измерения всех указанных величин могут быть либо натуральными — тонны, штуки, квт/час и т. д., либо стоимостными, в зависимости от чего различают натуральный и стоимостной межотраслевой баланс. Для определенности мы в дальнейшем будем иметь в виду натуральный баланс.

Если теперь все элементы j-го столбца табл. 1 разделить на $\bar{V}_j$, то число $a_{ij} = \bar{a}_{ij}/\bar{V}_j$ можно понимать как объем продукции i-й отрасли, необходимый для производства одной единицы продукта отрасли с номером j, а число

ТАБЛИЦА 1

Отрасли / Продукты	1	2	...	n	
1	$\bar{a}_{11}$	$\bar{a}_{12}$	...	$\bar{a}_{1n}$	$\sum\limits_{j=1}^{n} \bar{a}_{1j}$
2	$\bar{a}_{21}$	$\bar{a}_{22}$	...	$\bar{a}_{2n}$	$\sum\limits_{j=1}^{n} \bar{a}_{2j}$
...	...	...	...	...	...
n	$\bar{a}_{1n}$	$\bar{a}_{2n}$	...	$\bar{a}_{nn}$	$\sum\limits_{j=1}^{n} \bar{a}_{nj}$
Валовой выпуск	$\bar{V}_1$	$\bar{V}_2$	...	$\bar{V}_n$	
Конечное потребление	$\bar{c}_1$	$\bar{c}_2$	...	$\bar{c}_n$	

$c_j = \bar{c}_j/\bar{V}_j$ — как долю продукции j-й отрасли, израсходованную на непроизводственное потребление.

Числа a_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, n$, в некотором смысле полностью характеризуют технологию j-й отрасли в отчетный период: при данной структуре затрат и их объеме оказался возможным выпуск единицы ее продукции. Числа a_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, n$, носят название *коэффициентов прямых затрат* отрасли с номером j.

Матрица $A = (a_{ij})$ сама по себе несет много информации о сложившейся структуре межотраслевых связей, о существующей технологии общественного производства. Однако еще более интересные возможности открываются в связи с идеей использования матрицы A для текущего и долгосрочного планирования и прогнозирования производства. Сделаем два важных предположения.

Первое из них состоит в том, что мы будем считать сложившуюся технологию производства неизменной в течение некоторого отрезка времени $[T_0, T]$, где $T > T_0$. В зависимости от постановки задачи отрезок $[T_0, T]$ может быть равен одному календарному периоду (скажем, году) или нескольким.

Второе предположение состоит в постулировании свойства линейности существующей технологии. Именно, будем считать, что для осуществления объема x_j валового выпуска продукции отрасли j необходимо и достаточно произвести затраты продукции всех отраслей в объемах $a_{ij}x_j$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Ясно, что каждое из этих предположений является очередной идеализацией реального положения вещей. Так, требование линейности означает, в частности, что каждая отрасль способна произвести любой объем своей продукции при условии, что ей будет обеспечено сырье в необходимом количестве. На самом деле, конечно, это не так, ибо производственные возможности всякой отрасли ограничены имеющимся объемом трудовых ресурсов и основных фондов: станков, производственных площадей и т. д. Позднее, когда мы будем рассматривать динамический вариант описываемой модели, этот недостаток будет частично устранен.

Будем говорить, что матрица $A = (a_{ij})$ описывает технологию при *единичной интенсивности* работы всех отраслей. Допустим, что на отрезке времени $[T_0, T]$ все отрасли будут работать так, что отрасль с номером j, $j = 1, 2, \ldots, n$, произведет объем x_j валового выпуска своей продукции. Скажем, что j-я отрасль при этом работает с *интенсивностью* x_j. Обозначим через x вектор валового выпуска (*вектор интенсивностей*) $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Воспользовавшись предположением о линейности, нетрудно подсчитать часть общего валового выпуска, израсходованного на производственные нужды в процессе выпуска. Эта часть описывается вектором

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j, \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{nj}x_j\right).$$

Переходя к матричным обозначениям, заключаем, что вектор производственных затрат равен Ax. Тогда свободный остаток, равный $c = x - Ax$, будет использован на непроизводственные цели.

Однако основной вопрос, возникающий в планировании производства на период $[T_0, T]$, формулируется, как правило, наоборот: при заданном векторе c конечного потребления требуется определить необходимый вектор x валового выпуска. Другими словами, требуется решить систему уравнений

$$x - Ax = c \tag{1.9}$$

при заданном векторе c и матрице A.

Это уравнение вместе с изложенной выше интерпретацией матрицы A и векторов x, c называется *моделью Леонтьева.* Эта модель называется *продуктивной*, если для каждого неотрицательного вектора спроса $c \geqslant 0$ существует неотрицательное решение $x \geqslant 0$ уравнения (1.9).

Общепринятая схема межотраслевого баланса гораздо богаче того упрощенного варианта, который изложен здесь. Основное отличие состоит в подробном раскрытии составляющих вектора конечного спроса, таких, как валовые накопления, включающие капитальные вложения, прирост запасов и т. д.; личное потребление; весь непроизводственный сектор, состоящий из здравоохранения, науки, культуры и т. д. Информация, содержащаяся в подробной таблице межотраслевого баланса, полностью раскрывает не только межотраслевые связи народного хозяйства, но и структуру распределения и перераспределения национального продукта.

По поводу модели Леонтьева заметим еще раз, что она отражает лишь потенциальные возможности, заложенные в технологии производственного сектора. При этом модель (1.9) полностью абстрагируется от фактора времени. В ней предполагается, что процесс производства совершается мгновенно, и все промежуточные продукты оказываются произведенными к тому моменту, когда в них появляется потребность. Формально, конечно, можно построить модель типа (1.9), в которой будут различаться однотипные продукты, произведенные в разные моменты времени; однако статистическую информацию для такой модели межотраслевой баланс уже дать не в состоянии.

Подобные проблемы решаются с помощью построения динамических моделей типа модели Леонтьева или, как их иногда называют, *моделей динамического межотраслевого баланса.* Для учета временно́го лага (запаздывания) в процессе производства, который особенно велик для таких отраслей, как строительство, матрицу A разбивают на блоки, выделяя, например, коэффициенты затрат на капитальное строительство. Подробнее с этим можно ознакомиться в рекомендованной литературе. Однако, как обычно, более подробная модель хуже поддается теоретическому исследованию, поэтому в дальнейшем мы будем придерживаться нашей основной схемы модели Леонтьева с тем, чтобы наиболее отчетливо показать основные идеи, лежащие в основе изучения большого класса моделей производства.

Рассмотрим промежуток планирования, состоящий из T периодов (недель, месяцев, лет). В первый момент времени используется начальный запас товаров $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ и производится некоторый новый вектор товаров $x^1 = (x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1)$. Полученный набор товаров x^1 затем вновь пускается в производство и т. д. В последний момент T планового периода получаем вектор $x^T = (x_1^T, x_2^T, \ldots, x_n^T)$. Выбор вектора товаров x^{t+1}, выпуск которого возможен с использованием накопленного набора x^t, не является однозначным. Поэтому последовательность $\{x^1, x^2, \ldots, x^T\}$ является лишь одной из возможных траекторий развития производства. Можно по-разному оценивать целесообразность выбора той или иной траектории. Мы, для определенности, будем считать, что целевая функция имеет вид $c_1x_1^T + c_2x_2^T + \ldots + c_nx_n^T$, где вектор $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$, можно, например, рассматривать как цены на товары в последний момент планового периода. Запишем математическую формулировку изложенной динамической модели:

$$\max \langle c, x^T \rangle$$
$$Ax^{t+1} \leqslant x^t, \quad t = 0, 1, 2, \ldots, \quad T-1, \qquad (1.10)$$
$$x^t \geqslant 0, \quad t = 1, 2, \ldots, T.$$

Несмотря на то что построенная модель избавлена от ограничительного свойства статичности, она по-прежнему является сильно упрощенной. Так, в ней, как и в статической модели Леонтьева, не учитывается запаздывание в накоплении основных производственных фондов, вернее, сильные колебания в величине такого запаздывания. Если, к примеру, ввод в действие целой серии новых станков можно осуществить за год, то строительство нового завода, электростанции зачастую длится много дольше. Кроме того, в этой модели не учитываются инфраструктурные подразделения общественного производства, например, транспорт. Тем не менее оказывается, что качественные результаты, полученные при исследовании данной модели, мало меняются при переходе к более сложным и более содержательным моделям.

6. Модель рационального использования трудовых ресурсов. Опишем обобщение модели Леонтьева (см. предыдущий пункт) на тот случай, когда один и тот же продукт может выпускаться разными отраслями. Пусть в нашей производственной системе по-прежнему фигурируют n типов товаров. Имеется m технологических процессов $(m > n)$, каждый из которых выпускает один товар. Пусть для определенности множество $M = \{1, 2, \ldots, m\}$ разбито на n подмножеств M_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, так, что $M_k \cap M_{k'} = \varnothing$ при $k \neq k'$, $M = \bigcup_{k=1}^{n} M_k$. Считаем, что процесс с номером $j \in M_k$ выпускает k-й товар (продукт). Пусть $n \times m$-матрица $\widehat{A}$ описывает технологию данного множества технологических процессов. Именно, столбец a_{ij} описывает затраты продуктов с номерами $i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n$, необходимые для выпуска j-м технологическим процессом продукта с номером k, где $j \in M_k$. В отличие от обычной модели Леонтьева, матрица $\widehat{I}$, описывающая выпуск в данной модели, будет не квадратной, а прямоугольной $n \times m$-матрицей, состоящей из нулей и единиц, причем элемент e_{ij} этой матрицы равен 1, если $j \in M_i$, и 0, если $j \notin M_i$. Таким образом, технология нашей производственной системы задается парой матриц $\widehat{A}$ и $\widehat{I}$.

Пусть $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ — вектор интенсивностей, описывающий режим работы всех технологических процессов обобщенной модели Леонтьева. Тогда затраты продуктов на производственные нужды в данной модели описываются вектором $\widehat{A}x$, а валовой выпуск — вектором $\widehat{I}x$. Если вектор конечного спроса равен c, $c \geqslant 0$, то уравнение, аналогичное основному уравнению модели Леонтьева, имеет вид

$$\widehat{I}x - \widehat{A}x = c. \tag{1.11}$$

Мы будем считать, что сформулированная нами обобщенная модель Леонтьева является продуктивной, т. е. задача (1.11) имеет неотрицательное решение $x \geqslant 0$ при любом векторе конечного спроса $c \geqslant 0$. Для этого достаточно предположить, что существует такой набор из n технологических процессов (по одному для каждого наименования товара), что соответствующая этому набору обычная модель Леонтьева является продуктивной.

Допустим, что с каждым i-м технологическим процессом (столбцом матрицы $\hat{A}$) связано положительное число l_i — коэффициент трудовых затрат. Обозначим матрицу $\hat{I} - \hat{A}$ через $\tilde{A}$, вектор $(l_1, l_2, \ldots, l_m)$ — через l и рассмотрим следующую задачу линейного программирования:

$$\begin{gathered} \min \langle l, x \rangle \\ \tilde{A}x \geqslant c, \quad x \geqslant 0. \end{gathered} \tag{1.12}$$

Содержательный смысл этой задачи ясен: обеспечить удовлетворение конечного спроса $c \geqslant 0$ с минимальными затратами трудовых ресурсов.

Оказывается, задача (1.12) обладает следующим свойством: нет надобности использовать все имеющиеся технологические процессы, поскольку существует такой набор из n процессов (по одному для каждого вида товара), что его применение приводит к оптимальному результату (в смысле экономии трудовых затрат) при любом вектора конечного спроса c. Доказательство этого факта будет дано в гл. IV.

7. Расчет химической технологии. Пусть имеются N химических реакторов, соединенных последовательно и перерабатывающих некоторый тип сырья с целью выделить из него полезный продукт, и пусть $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — характеристика свойств данного продукта. Например, x_1 — его концентрация в среде-носителе, $x_2, \ldots, x_n$ — другие интересующие исследователя свойства химического вещества. Обозначим через $x^k = (x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k)$ характеристику продукта на входе k-го реактора, тогда x^{k+1} — его характеристика на выходе.

Пусть $u^k = (u_1^k, u_2^k, \ldots, u_m^k)$ — набор параметров, регулирующих процесс преобразования продукта в k-м реакторе: количество катализаторов, температура, сила электрического тока и т. д. Считаем, что известна зависимость вида $x^{k+1} = f_k(x^k, u^k)$, $k = 1, 2, \ldots, N$, где f_k характеризует k-й реактор. При этом на вектор u^k могут быть наложены ограничения $\varphi_k(u^k) \leqslant d_k$, $k = 1, 2, \ldots, N$, например, ограничения на силу тока, на температуру, на общий расход и соотношение между различными катализаторами.

Требуется определить такие значения управляющих параметров u^k, $k = 1, 2, \ldots, N$, чтобы при заданной начальной характеристике продукта $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n)$ максимизировать величину $\psi(x^1, x^2, \ldots, x^N, u^1, u^2, \ldots, u^N)$. Эта величина может, например, выражать стоимость полученного продукта на выходе последнего реактора с учетом затрат на его производство.

В том случае, когда все зависимости f_k, φ_k, ψ линейны, сформулированная задача будет задачей линейного программирования. Подобная задача носит название *дискретной линейной задачи оптимального управления.* В общем виде она может быть записана так:

$$\max\left\{\langle c^{N+1}, x^{N+1}\rangle + \sum_{k=1}^{N}\left(\langle c^k, x^k\rangle + \langle b^k, u^k\rangle\right)\right\}$$

$$x^{k+1} = A_k x^k + B_k u^k, \quad D_k u^k \leqslant d_k, \quad k = 1, 2, \ldots, N, \ x^1 = \hat{x}. \tag{1.13}$$

Отметим, что к виду (1.13) часто приводятся также задачи, не являющиеся по своей постановке динамическими. В качестве иллюстрации покажем, как привести к виду (1.13) транспортную задачу (см. п. 2).

Введем в рассмотрение величину

$$y_{ik} = \sum_{j=1}^{k} x_{ij}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

обозначающую суммарное количество продукта, перевезенное из i-го пункта S_i производства продукта в первые k пунктов Q_j потребления. Очевидно, что

$$y_{ik} = y_{i,k-1} + x_{ik}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

где

$$y_{i0} = 0, \qquad y_{in} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i.$$

Обозначив $y^k = (y_{1k}, y_{2k}, \ldots, y_{mk})$, $x^k = (x_{1k}, x_{2k}, \ldots, x_{mk})$, получаем следующую формулировку транспортной задачи:

Определить последовательность векторов x^k, $k = 1, 2, \ldots, n$, являющихся решением задачи

$$\max \sum_{k=1}^{n} \langle c^k, x^k\rangle$$

$$y^k = y^{k-1} + x^k, \quad \langle x^k, e\rangle = b_k, \quad y^0 = 0, \quad y^n = a, \tag{1.14}$$

где $c^k = (c_{1k}, c_{2k}, \ldots, c_{mk})$, $e = (1, 1, \ldots, 1)$, $e \in \mathbf{R}^m$, $a = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$.

Получим, очевидно, частный случай задачи (1.13) (правда, в (1.14) несколько иные обозначения — здесь управляющими параметрами являются x^k).

§ 3. Различные формы задач линейного программирования и их эквивалентность

Несмотря на различие содержательных ситуаций, описанных в предыдущем параграфе, экстремальные математические задачи, соответствующие им, имеют много общего. Так, в каждой из этих задач требуется максимизировать или минимизировать линейную функцию от нескольких переменных. При этом ограничения, наложенные на совокупность переменных, являются либо линейными неравенствами, либо линейными уравнениями. Правда, ограничения типа неравенств часто носят разный смысл: в одном случае линейная функция от переменных должна быть больше соответствующей константы, в другом — меньше. Однако очевидно, что всегда можно добиться, чтобы все знаки неравенств были направлены в одну сторону (умножив при необходимости обе части неравенства (на (-1))).

Различают три основные формы задач линейного программирования в зависимости от наличия ограничений разного типа.

Стандартная задача линейного программирования.

$$\max (c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n)$$

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leqslant b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leqslant b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leqslant b_m, \\ x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad \ldots, \quad x_n \geqslant 0, \end{gathered}$$

или, в матричной записи,

$$\max \langle c, x \rangle$$

$$Ax \leqslant b, \; x \geqslant 0,$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$, $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$, $A = (a_{ij})$ — матрица коэффициентов. Вектор c называется *вектором коэффициентов линейной формы*, b — *вектором ограничений*.

Стандартная задача важна ввиду наличия большого числа прикладных моделей, сводящихся наиболее естественным образом к этому классу задач линейного программирования.

Каноническая задача линейного программирования.

$$\max (c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n)$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m,$$

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0,$$

или, в матричной записи,

$$\max \langle c, x \rangle$$

$$Ax = b, \quad x \geqslant 0.$$

Основные вычислительные схемы (симплекс-метод и его модификации) решения задач линейного программирования разработаны именно для канонической задачи.

Общая задача линейного программирования

В этой задаче часть ограничений носит характер неравенств, а часть является уравнениями. Кроме того, не на все переменные наложено условие неотрицательности:

$$\max (c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n)$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leqslant b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leqslant b_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \leqslant b_k,$$

$$a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + \ldots + a_{k+1,n}x_n = b_{k+1},$$

$$a_{k+2,1}x_1 + a_{k+2,2}x_2 + \ldots + a_{k+2,n}x_n = b_{k+2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m,$$

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \ldots, x_r \geqslant 0.$$

Здесь $k \leqslant m$, $r \leqslant n$. Ясно, что стандартная задача получается как частный случай общей при $k = m$, $r = n$; каноническая — при $k = 0$, $r = n$.

Все три перечисленные формы задач эквивалентны в том смысле, что каждую из них можно простыми преобразованиями привести к любой из двух остальных. Поэтому, если имеется способ решения одной из этих задач (например, канонической), то тем самым мы умеем решать любую из трех задач линейного программирования.

Поясним сказанное на примерах стандартной и канонической задач. Покажем, как привести стандартную задачу к канонической форме. Введем в рассмотрение новые переменные $z_1, z_2, \ldots, z_m$ — столько, сколько ограничений в стандартной задаче,— и рассмотрим следующую каноническую задачу:

$$\max (c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + 0 \cdot z_1 + \ldots + 0 \cdot z_m)$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + z_1 = b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + z_2 = b_2,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + z_m = b_m,$$
$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0,$$
$$z_1 \geqslant 0, \quad z_2 \geqslant 0, \ldots, z_m \geqslant 0,$$

или, в матричной форме,

$$\max \langle c, x \rangle$$
$$Ax + z = b, \quad x \geqslant 0, \quad z \geqslant 0.$$

Пусть $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, z_1^*, z_2^*, \ldots, z_m^*)$ — решение сформулированной канонической задачи. Тогда решение исходной стандартной задачи находится очень просто — это есть вектор $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$. В самом деле, ясно, что он удовлетворяет всем ограничениям стандартной задачи: его координаты неотрицательны (это требуется и в канонической задаче), а поскольку числа $z_1^*, z_2^*, \ldots, z_m^*$ также неотрицательны, то из равенств $a_{i1}x_1^* + a_{i2}x_2^* + \ldots + a_{in}x_n^* + z_i^* = b_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, вытекают неравенства $a_{i1}x_1^* + a_{i2}x_2^* + \ldots + a_{in}x_n^* \leqslant b_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Допустим теперь, что вектор $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ не является решением стандартной задачи. В таком случае найдется другой вектор $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$, который также удовлетворяет всем ограничениям стандартной задачи, однако доставляет максимизируемой функции большее значение, чем вектор x^*: $c_1\bar{x}_1 + c_2\bar{x}_2 + \ldots + c_n\bar{x}_n > c_1x_1^* + c_2x_2^* + \ldots + c_nx_n^*$. Покажем, что это невозможно.

Для этого построим вектор, удовлетворяющий ограничениям нашей канонической задачи и такой, что на нем достигается большее значение целевой (максимизируемой) функции, чем на $\left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, z_1^*, z_2^*, \ldots, z_m^*\right)$, что будет противоречить оптимальности последнего.

Рассмотрим вектор $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n, \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_m)$, где $\bar{z}_i = b_i - (a_{i1}\bar{x}_1 + a_{i2}\bar{x}_2 + \ldots + a_{in}\bar{x}_n)$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Поскольку $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ удовлетворяет ограничениям стандартной задачи, то $\bar{z}_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$. В таком случае вектор $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n, \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_m)$ удовлетворяет всем ограничениям вспомогательной канонической задачи, и при этом $\langle c, \bar{x}\rangle > \langle c, x^*\rangle$, что противоречит оптимальности вектора $\left(x_1^*, \ldots, x_n^*, z_1^*, \ldots, z_m^*\right)$. Полученное противоречие и доказывает наше утверждение. Таким образом, стандартная задача линейного программирования может быть сведена к канонической.

Еще проще процесс сведения канонической задачи к стандартной — надо лишь каждое уравнение из системы ограничений заменить двумя неравенствами:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i \quad \Leftrightarrow \quad \begin{gathered} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leqslant b_i, \\ -a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \ldots - a_{in}x_n \leqslant -b_i. \end{gathered}$$

Если на переменную x_j общей задачи линейного программирования не накладывается условие неотрицательности, то для того чтобы общую задачу свести к стандартной, нужно положить $x_j = u_j - v_j$, где u_j, v_j — новые переменные, и наложить условия $u_j \geqslant 0$, $v_j \geqslant 0$.

Тот случай, когда в задаче требуется минимизировать линейную форму $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$, легко свести к задаче максимизации: следует рассмотреть задачу нахождения максимума функции $- c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots - c_nx_n$.

Рассмотрим задачи линейного программирования, приведенные в предыдущем параграфе. Модель (1.7) составления плана производства является стандартной задачей, так же как и задача о диете. В последней надо лишь ограничения $Ax \geqslant b$ привести к виду $(-Ax) \leqslant -b$. Транспортная модель является канонической задачей с той несущественной, как мы уже знаем, разницей, что в ней требуется минимизировать функцию. Модель рационального использования посевных площадей следует отнести к общей задаче линейного программирования.

Второй вариант (1.8) модели составления плана производства также близок к стандартной задаче линейного программирования. Убедимся в этом. Введем в рассмотрение вектор $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \alpha)$ размерности $n+1$. Тогда вектор коэффициентов в этой задаче есть вектор $\bar{c} = (0, 0, \ldots, 0, 1)$. Матрица ограничений имеет вид:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & 0 \\ -1 & 0 & \ldots & 0 & \hat{x}_1 \\ 0 & -1 & \ldots & 0 & \hat{x}_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & -1 & \hat{x}_n \end{pmatrix},$$

а вектор ограничений есть вектор $\bar{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m, 0)$.

С использованием этих обозначений задача (1.8) принимает вид

$$\max \langle \bar{c}, \bar{x} \rangle$$

$$\bar{A}\bar{x} \leqslant \bar{b}, \quad x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0.$$

Здесь отсутствует условие неотрицательности переменной α, поэтому формально эту задачу следует отнести к общей задаче линейного программирования.

Модель рационального размещения трудовых ресурсов (1.12) после очевидных преобразований также приводится к виду стандартной задачи.

Изучим подробнее запись (1.10) динамической модели планирования. Ясно, что это есть стандартная задача линейного программирования. Выпишем явно ее матрицу коэффициентов и вектор ограничений. Вектором переменных здесь служит вектор $\bar{x} = (x^1, x^2, \ldots, x^t, \ldots, x^T)$ размерности $n \times T$, поскольку в этом выражении каждая буква x^t обозначает n-мерный вектор $x^t = (x_1^t, x_2^t, \ldots, x_n^t)$ Вектор коэффициентов есть вектор $\bar{c} = (0, 0, \ldots, 0, c)$, где символами 0 обозначены $n-1$ нулевых n-мерных векторов. Матрица коэффициентов имеет вид

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 \ldots & 0 & 0 \\ -I & A & 0 & 0 \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -I & A & 0 \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots & -I & A \end{pmatrix}.$$

Вектор ограничений равен $\bar{b} = (x_0, 0, 0, \ldots, 0)$, где вновь

0 означает нулевой n-мерный вектор. Нетрудно убедиться, что матричная запись

$$\max \langle \bar{c}, \bar{x} \rangle$$
$$A\bar{x} \leqslant \bar{b}, \quad \bar{x} \geqslant 0, \tag{1.15}$$

эквивалентна (1.10).

При изучении задач линейного программирования сложилась определенная терминология, которой мы и будем придерживаться. Линейная форма $\langle c, x \rangle = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$, подлежащая максимизации (или минимизации), называется *целевой функцией*. Вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющий всем ограничениям задачи линейного программирования, называется *допустимым вектором*, или *планом*. Задача линейного программирования, для которой существуют допустимые векторы, называется *допустимой задачей*. Допустимый вектор x^*, доставляющий наибольшее значение целевой функции по сравнению с любым другим допустимым вектором x, т. е. $\langle c, x^* \rangle \geqslant \langle c, x \rangle$, называется *решением задачи*, или *оптимальным планом*. Максимальное значение $d = \langle c, x^* \rangle$ целевой функции называется *значением задачи*.

Обсудим, являются ли допустимыми задачи, встретившиеся нам в § 2. Ясно, что задача диеты, ограничения которой записываются неравенствами (1.1) и (1.2), является допустимой не при любых значениях ее параметров a_{ij} и b_i. В самом деле, если, например, в первой строке матрицы A все элементы a_{1j} равны 0, а число b_1 положительно, то не существует допустимых векторов x. Но условие $a_{1j} = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, означает, что компонента N_1 не содержится ни в одном из рассматриваемых видов пищевых продуктов. Поэтому ясно необходимое условие для того, чтобы задача о диете была допустимой: всякая рассматриваемая компонента N_i должна содержаться хотя бы в одном из продуктов, т. е. в каждой строке матрицы A имеется хотя бы один положительный элемент. Поскольку по смыслу коэффициентов a_{ij} все они неотрицательны, то это условие оказывается и достаточным — ясно, что можно взять вектор x с такими большими величинами x_i, что все ограничения (1.1) будут заведомо выполнены.

Очевидно, что для допустимости транспортной задачи необходимо и достаточно выполнение условия $\sum\limits_{j=1}^{n} b_j =$

$= D = \sum_{i=1}^{m} a_i$, т. е. чтобы спрос на продукт совпадал с его предложением. Действительно, если план (x_{ij}) допустим для этой задачи, то суммируя первое из равенств в (1.5) по i, а второе — по j, получаем

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

С другой стороны, нетрудно убедиться, что при выполнении условия баланса спроса и предложения, существует допустимый план $x_{ij} = a_i b_j / D$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Понятно, что задача для модели рационального использования посевных площадей не всегда допустима — директивные планы b_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, производства продукции не должны быть слишком высокими.

Задачи (1.7), (1.8), (1.10), соответствующие моделям составления плана производства и динамической модели планирования, допустимы, если векторы запасов товаров b и x_0 неотрицательны (это подразумевается), так как нулевой вектор удовлетворяет всем ограничениям.

Тот факт, что задача (1.12) рационального использования трудовых ресурсов допустима, следует из предположения о продуктивности матрицы $\hat{A}$.

Естественно, имеет смысл искать оптимальный план лишь для допустимых задач линейного программирования. Следует, однако, отметить, что не всякая допустимая задача имеет решение — множество ее допустимых планов может быть неограничено и при этом целевая функция на этом множестве может также оказаться неограниченной. В качестве простейших примеров можно привести следующие. Пусть x_1 — число (вектор размерности 1). Задача

$$\max x_1$$

$$x_1 \leqslant -1, \quad x_1 \geqslant 0$$

не является допустимой. Задача

$$\max x_1$$

$$x_1 \geqslant 0$$

допустима, но решений не имеет.

§ 4. Проблема отыскания численного решения задачи линейного программирования

Первым шагом в исследовании задач линейного программирования, естественно, является попытка применить для отыскания решения классический аппарат математического анализа и высшей алгебры. Рассмотрим простейшую задачу нахождения максимума дифференцируемой функции на отрезке. Пусть $f(x)$ — функция одного переменного, заданная на отрезке $[a, b]$. Требуется найти максимум функции $f(x)$ на $[a, b]$. Алгоритм, который дает для решения этой задачи математический анализ, таков: следует вычислить производную $f'(x)$, найти все решения $x^1, x^2, \ldots, x^k$ уравнения $f'(x) = 0$, вычислить значения $f(x^1), f(x^2), \ldots, f(x^k), f(a), f(b)$ и выбрать из них наибольшее. Сразу видно, что даже в этом простом случае могут возникнуть осложнения. Как решать уравнение $f'(x) = 0$ — не будет ли эта задача столь же сложной, как и основная проблема поиска максимума? Что делать, если стационарных точек $x^1, x^2, \ldots, x^k$ очень много, или даже бесконечное множество? Как организовать их перебор и сравнение значений $f(x^i)$?

Еще сложнее обстоит дело для функций нескольких переменных. Пусть $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть n-мерный вектор, множество X — замкнутое подмножество n-мерного пространства $\mathbf{R}^n$, $f(x)$ — функция n переменных, заданная на множестве X. Требуется найти максимум дифференцируемой функции $f(x)$ на множестве X. Напомним, что в таком случае рекомендует классический анализ. Рассмотрим множество точек $x(\theta)$ n-мерного пространства, координаты которых имеют вид

$$x_1(\theta) = x_1^0 + \theta s_1, \quad x_2(\theta) = x_2^0 + \theta s_2, \ \ldots$$
$$\ldots \ x_n(\theta) = x_n^0 + \theta s_n, \quad \theta \geqslant 0.$$

Геометрически множество таких точек представляет собой луч с началом в точке $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, направление которого совпадает с вектором $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$: Будем считать, что $s_1^2 + s_2^2 + \ldots + s_n^2 = 1$.

Зафиксировав направление $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ и увеличивая число θ, начиная от нуля, можно проследить, как меняется значение функции $f(x_1(\theta), x_2(\theta), \ldots, x_n(\theta))$. Локальное поведение функции $f(x)$ вдоль направления s будет определяться производной по θ в точке $\theta = 0$ (напомним, что $\theta = 0$ соответствует $x(0) = x^0$). Эту производную можно вычислить, пользуясь правилом дифференцирования сложной функции:

$$f'_\theta(x_1(\theta),\ x_2(\theta),\ \ldots,\ x_n(\theta)) =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x_1} x'_1(\theta) + \frac{\partial f}{\partial x_2} x'_2(0) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} x'_n(0) =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x_1} s_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} s_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} s_n.$$

Величина

$$f_s(x^0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0)\, s_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x^0)\, s_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0)\, s_n$$

называется *производной функции* $f(x)$ в точке x^0 *по направлению* $s = (s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_n)$. Вектор $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0),\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x^0),\ \ldots\right.$ $\left.\ldots,\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0)\right)$ называется *градиентом функции* $f(x)$ в точке x^0 и обозначается $\operatorname{grad} f(x^0)$. Таким образом, $f_s(x^0) = \langle \operatorname{grad} f(x^0),\ s\rangle$.

Если теперь задаться вопросом, по какому направлению s функция $f(x)$ в окрестности точки x^0 возрастает быстрее всего, то используя основные свойства скалярного произведения, можно показать, что это имеет место только в том случае, когда $s = \operatorname{grad} f(x^0)$.

Итак, один из основных фактов математического анализа для этой ситуации формулируется следующим образом: значение функции $f(x) = f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ в окрестности точки $\left(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0\right)$ растет быстрее всего, если в качестве вектора направления $s = (s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_n)$ выбрать градиент функции $f(x)$ в точке x^0. Если в x^0 достигается локальный максимум функции $f(x)$, то в этой точке нет направления, вдоль которого функция возрастает. Поэтому необходимым условием максимума функции $f(x)$ во *внутренней* точке x^0 множества X является равенство градиента $\operatorname{grad} f(x^0)$ нулевому вектору. Здесь существенны слова «внутренняя точка» — все предыдущие рассуждения имеют силу лишь в том случае, когда из точки x^0 можно хоть немного сдвинуться по любому направлению, не выходя за пределы множества X.

Окончательно, для нахождения максимума функции $f(x)$ на множестве X надо найти все решения $x^p = \left(x_1^p,\ x_2^p,\ \ldots,\ x_n^p\right)$, $p = 1,\ 2,\ \ldots,\ k$, системы уравнений

$\partial f(x)/\partial x_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, вычислить значения $f(x^1)$, $f(x^2), \ldots, f(x^k)$ *и все значения* $f(x)$ *на границе множества* X, а затем выбрать из них максимальное.

Видно, что в случае функции многих переменных ситуация усугубляется; даже если удастся легко решить систему уравнений $\operatorname{grad} f(x) = 0$ и найти локальные максимумы $f(x)$ внутри множества X, надо еще, как и в одномерном случае, вычислять значения функции во всех точках границы. Но ведь граница множества X, лежащего в n-мерном пространстве, при $n > 1$ всегда (за исключением тривиальных случаев) состоит из бесконечного числа точек. Как поступать в этом случае, общего рецепта классический анализ не дает — для каждой задачи нужно искать свой метод. Так, если множество X задается системой уравнений, то отыскание экстремума функции на этом множестве возможно с помощью метода множителей Лагранжа, однако вычислительные проблемы остаются и в этом случае. Для задач линейного программирования дело осложняется еще и тем, что среди ограничений, задающих допустимое множество, присутствуют ограничения типа неравенств.

Обратимся к стандартной задаче линейного программирования. Обозначим через X множество допустимых векторов. Градиент целевой функции равен $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ и является величиной постоянной, не зависящей от точки вычисления. Следовательно, если не все c_i равны нулю одновременно (в противном случае нет оптимизационной задачи), то у функции $\langle c, x\rangle$ нет локальных максимумов и, следовательно, ее максимальное значение достигается на границе множества X. Отметим, что граница множества X в явном виде нам не указана. Таким образом, основные вычислительные проблемы решения задач линейного программирования состоят в определении границы множества X и организации вычислений значений функции $\langle c, x\rangle$ в точках этой границы (а их бесконечно много), с тем чтобы найти среди них оптимальный план.

ГЛАВА II. ВЫПУКЛЫЕ МНОГОГРАННИКИ И ЛИНЕЙНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

§ 1. Геометрическая интерпретация задач линейного программирования

Рассмотрим пример простейшей задачи линейного программирования

$$\max(x_1 + x_2)$$

$$3x_1 + 5x_2 \leqslant 15, \quad -x_1 + x_2 \leqslant 2, \quad 10x_1 + 7x_2 \leqslant 35,$$

$$-x_1 - x_2 \leqslant -1, \quad x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0.$$

Как известно из аналитической геометрии, уравнение $ax_1 + bx_2 = c$ определяет прямую на плоскости x_1Ox_2 (если a и b не равны нулю одновременно). При этом вся плоскость делится на две полуплоскости. Если две точки плоскости (x_1', x_2') и (x_1'', x_2'') не лежат на данной прямой, то их взаимное расположение относительно этой прямой определяется величинами $ax_1' + bx_2' - c$ и $ax_1'' + bx_2'' - c$; если эти величины одного знака, то точки лежат по одну сторону от прямой, если разного — то по разные стороны от данной прямой. Следовательно, неравенство $ax_1 + bx_2 \leqslant \leqslant c$ описывает множество точек (x_1, x_2), заполняющих полуплоскость по одну сторону от прямой $ax_1 + bx_2 = c$, включая и саму прямую.

Эти соображения помогают изобразить на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих всем ограничениям в нашем примере. Так, неравенство $3x_1 + 5x_2 \leqslant 15$ определяет ту часть полуплоскости, которой принадлежит начало координат, так как точка (0, 0) ему удовлетворяет. На рис. 2.1 заштриховано множество допустимых точек, т. е. точек плоскости, координаты которых удовлетворяют всем неравенствам рассматриваемой задачи линейного программирования.

Обратимся к целевой функции $x_1 + x_2$. Рассмотрим прямую $x_1 + x_2 = 5$ (ее график изображен на рисунке штриховой линией). Видно, что график этой прямой не пересекает допустимое множество. Это значит, что среди допустимых точек (x_1, x_2) не найдется таких, которые придавали бы целевой функции значение 5.

Уравнение $x_1 + x_2 = d$ при различных значениях d описывает семейство параллельных прямых, и поставленную нами задачу линейного программирования можно переформулировать следующим образом: найти такое максимальное значение d, при котором прямая $x_1 + x_2 = d$

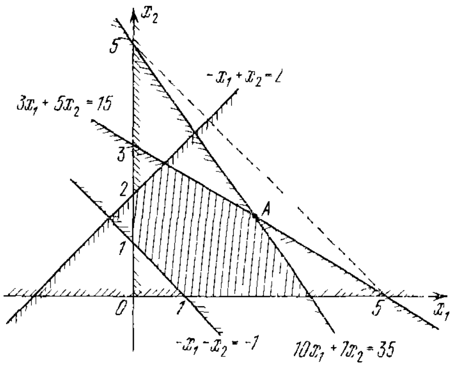

Рис. 2.1.

пересекает допустимое множество. Для данного примера ясно, что если двигать эту прямую параллельно самой себе ближе к допустимому (заштрихованному) множеству, то первой точкой этого множества на ее пути окажется точка A с координатами (70/29, 45/29) — пересечение прямых $10x_1 + 7x_2 = 35$ и $3x_1 + 5x_2 = 15$.

На этом примере можно увидеть все главные особенности задач линейного программирования: в нем допустимое множество точек представляет собой выпуклый многоугольник, получившийся в результате пересечения полуплоскостей, и наибольшее значение целевой функции достигается в его вершине — «крайней» точке.

Ясно, что точка пересечения прямых $10x_1 + 7x_2 = 35$ и $3x_1 + 5x_2 = 15$ не случайно оказалась решением задачи — если через нее провести прямую семейства $x_1 + x_2 = d$, то она лежит между этими прямыми.

То же самое можно выразить другим способом. Напомним, что вектором нормали к прямой $ax_1 + bx_2 = c$ является вектор с координатами (a, b). Изобразим векторы нормалей всех прямых, участвующих в нашем примере, на координатной плоскости (рис. 2.2). Здесь нормали прямых обозначены в соответствии с порядком следования ограничений в задаче. Нормали $(-1, 0)$ и $(0, -1)$ соответствуют ограничениям $x_1 \geqslant 0$ и $x_2 \geqslant 0$. Штриховой линией обозначен вектор $(1, 1)$ нормали целевой функции.

Этот вектор лежит между нормалями (1) и (3) к прямым, пересечение которых и дает нужную точку.

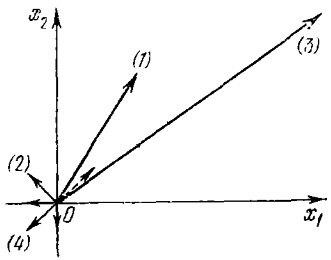

Рис. 2.2.

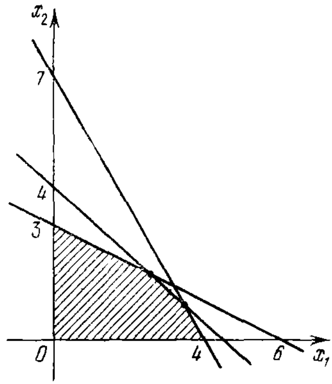

Рис. 2.3.

Может случиться, что решение задачи линейного программирования не единственно, как в рассмотренном примере, а состоит из бесконечного множества точек. Для иллюстрации рассмотрим еще одну задачу:

$$\max(8x_1 + 9x_2)$$

$$3x_1 + 6x_2 \leqslant 18, \quad 7x_1 + 4x_2 \leqslant 28, \quad 8x_1 + 9x_2 \leqslant 36,$$

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0.$$

Здесь решением служит любая точка отрезка между точками $(18/7, 12/7)$ и $(108/31, 28/31)$. Отметим, что сами эти точки — вершины допустимого многоугольника — также являются решениями (рис. 2.3).

Таким образом, процедура поиска решения в таких простейших задачах линейного программирования является несложной: нужно каким-либо способом описать многоугольник допустимых точек, найти его вершины и выбрать из них те, координаты которых придают максимальное значение целевой функции. Кроме того, заслуживает рассмотрения и наглядная связь между нормалью к линейной форме, задающей целевую функцию, и нормалями к прямым, пересечение которых определяет решение задачи.

И хотя в случае, когда изучаются задачи линейного программирования в пространстве большого числа переменных с большим числом ограничений, структура допустимого множества становится гораздо менее наглядной, а вычислительные сложности возрастают чрезвычайно, основные идеи поиска решения остаются неизменными. При этом особую роль играет именно изучение связи между нормалями, определяемыми ограничениями задачи и нормалью к целевой функции. Замечательные результаты, полученные на этом пути, составляют содержание теории двойственности.

§ 2. Выпуклые множества и теоремы о разделяющей гиперплоскости

1. В этом параграфе будут сформулированы и доказаны основные факты, относящиеся к произвольным выпуклым множествам, которые в дальнейшем будут служить инструментом исследования задач линейного программирования.

Пусть $\mathbf{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство. Ниже мы употребляем общепринятые математические обозначения: $x \in X$ — x является элементом множества X; $X_1 \subseteq X_2$ — X_1 является подмножеством X_2; $X = \{x | x$ обладает свойством $S\}$ — множество X содержит все элементы, обладающие свойством S, и не содержит других; $x \geqslant y$ — всякая координата вектора y не превосходит соответствующей координаты вектора x; $x \geqslant 0$ — все координаты вектора x неотрицательны; $x > 0$ — все координаты вектора x положительны; x_i — i-я координата вектора x. Не различая в n-мерном пространстве понятий точки и вектора, мы используем эти термины равноправно.

Определение 2.1. Множество X называется *выпуклым*, если вместе с любыми двумя своими точками x^1, x^2 ($x^1, x^2 \in X$) оно содержит и все точки вида

$$x = \alpha x^1 + (1-\alpha)x^2, \tag{2.1}$$

где $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

Чтобы пояснить геометрический смысл понятия выпуклого множества, напомним способ задания отрезка $[x^1, x^2]$ между двумя точками x^1 и x^2 в n-мерном пространстве.

Параметрическое уравнение прямой, проходящей через точки x^1, x^2, имеет вид

$$x(\alpha) = x^2 + (x^1 - x^2)\alpha, \tag{2.2}$$

где $x^1 - x^2$ называется *направляющим вектором* прямой. При $\alpha = 0$ получаем $x(0) = x^2$, при $\alpha = 1$ имеем $x(1) = x^1$. Когда α меняется в пределах $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, точка $x(\alpha)$ пробегает весь отрезок между точками x^1 и x^2.

Перегруппировав члены в (2.2), получим $x(\alpha) = \alpha x^1 + (1 - \alpha)x^2$. Таким образом, ясно, что всякая точка,

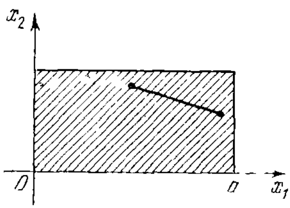

Рис. 2.4.

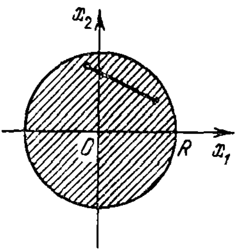

Рис. 2.5.

представимая в виде (2.1), лежит на отрезке прямой между точками x^1 и x^2, и наоборот, всякая точка этого отрезка представима в виде (2.1). Следовательно, определение выпуклого множества может быть сформулировано на геометрическом языке.

Определение 2.2. Множество X называется *выпуклым*, если вместе с любыми двумя своими точками x^1, x^2 оно содержит весь отрезок, концами которого служат эти точки.

Приведем примеры выпуклых множеств на плоскости.

Прямоугольник $X = \{(x_1, x_2) | 0 \leqslant x_1 \leqslant a,\ 0 \leqslant x_2 \leqslant b\}$ (рис. 2.4). Покажем, что X выпукло. Пусть (x_1, x_2), (x_1', x_2') — две точки, принадлежащие прямоугольнику X, α — произвольное число, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Надо доказать, что точка с координатами $(\alpha x_1 + (1 - \alpha) x_1', \alpha x_2 + (1 - \alpha) x_2')$ также принадлежит X. Другими словами, надо убедиться в выполнении неравенств $0 \leqslant \alpha x_1 + (1 - \alpha) x_1' \leqslant a$, $0 \leqslant \alpha x_2 + (1 - \alpha) x_2' \leqslant b$. Поскольку $0 \leqslant x_1 \leqslant a$, $0 \leqslant x_1' \leqslant a$, то умножая эти неравенства соответственно на неотрицательные числа α и $1-\alpha$, а затем складывая, получаем

$$0 \leqslant \alpha x_1 + (1-\alpha) x_1' \leqslant \alpha a + (1-\alpha) a = a.$$

Второе неравенство доказывается аналогично.

Круг $X = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \leqslant R^2\}$ (рис. 2.5). Убедимся в том, что круг — выпуклое множество. Пусть $(x_1, x_2) \in X$, $(x_1', x_2') \in X$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Надо доказать, что $(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_1', \alpha x_2 + (1-\alpha) x_2') \in X$. Проделаем несложные преобразования: $(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_1')^2 + (\alpha x_2 + (1-\alpha) x_2')^2 = \alpha^2 (x_1^2 + x_2^2) + 2\alpha (1-\alpha)(x_1 x_1' + x_2 x_2') + (1-\alpha)^2 \times ((x_1')^2 + (x_2')^2)$. Вспомним основное неравенство для скалярного произведения (неравенство Коши — Буняковского) $x_1 x_1' + x_2 x_2' \leqslant \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \sqrt{(x_1')^2 + (x_2')^2}$. Заменяя во всех выражениях выше $x_1^2 + x_2^2$ и $(x_1')^2 + (x_2')^2$ на R^2 (от этого неравенство только усилится), получаем:

$$(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_1')^2 + (\alpha x_2 + (1-\alpha) x_2')^2 \leqslant$$
$$\leqslant R^2 [\alpha^2 + 2\alpha (1-\alpha) + (1-\alpha)^2] = R^2 (\alpha + (1-\alpha))^2 = R^2.$$

Тем самым доказано, что круг — выпуклое множество.

Важную роль в дальнейшем изложении имеет следующее простое свойство выпуклых множеств.

Теорема 2.1. *Пересечение выпуклых множеств выпукло.*

Доказательство. Пусть $X = X_1 \cap X_2$, где X_1, X_2 — выпуклые множества. Рассмотрим две произвольные точки x и x' множества X. Поскольку $X \subseteq X_1$, то $x, x' \in X_1$. В силу выпуклости множества X_1 из этого вытекает, что весь отрезок $[x, x']$ принадлежит X_1. Точно так же, $[x, x'] \subseteq X_2$. Но тогда $[x, x'] \subseteq X_1 \cap X_2 = X$.

Определение 2.3. *Суммой* двух множеств $X_1 \in \mathbf{R}^n$, $X_2 \in \mathbf{R}^n$ назовем множество $X = \{x \mid x = x^1 + x^2,\ x^1 \in X_1,\ x^2 \in X_2\}$, состоящее из всех попарных сумм элементов множеств X_1, X_2.

Теорема 2.2. *Сумма выпуклых множеств выпукла.*

Доказательство. Пусть $x, \bar{x} \in X$, где $X = X_1 + X_2$. Тогда в X_1 и в X_2 найдутся такие элементы, что $x = x^1 + x^2$, $\bar{x} = \bar{x}^1 + \bar{x}^2$, $x^1, \bar{x}^1 \in X_1$, $x^2, \bar{x}^2 \in X_2$. Пусть теперь α — произвольное число, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Тогда $\alpha x^1 + (1-\alpha)\bar{x}^1 \in X_1$, $\alpha x^2 + (1-\alpha)\bar{x}^2 \in X_2$. По определению X, сумма этих элементов принадлежит множеству X:

$$\alpha x^1 + (1-\alpha)\bar{x}^1 + \alpha x^2 + (1-\alpha)\bar{x}^2 =$$
$$= \alpha(x^1 + x^2) + (1-\alpha)(\bar{x}^1 + \bar{x}^2) = \alpha x + (1-\alpha)\bar{x} \in X.$$

Примером выпуклого множества в пространстве $\mathbf{R}^n$ служит любое линейное подпространство L: по определению подпространства, оно содержит произвольную линейную комбинацию своих элементов.

2. Основным свойством, характеризующим выпуклые множества, является так называемое свойство отделимости. Для пояснения этого свойства рассмотрим на плоскости замкнутое выпуклое множество X и точку d, не принадлежащую этому множеству (рис. 2.6). Тогда найдется такая прямая $ax_1 + bx_2 = c$, что множество X и точка $d = (d_1, d_2)$ лежат по разную сторону от этой прямой, т. е. для любой точки $(x_1, x_2) \in X$ выполняется неравенство $ax_1 + bx_2 \leqslant c$, в то время как $ad_1 + bd_2 > c$.

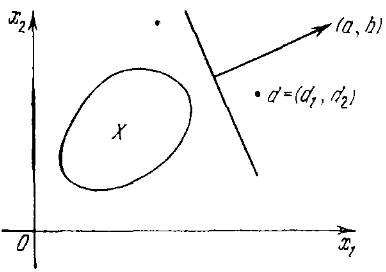

Рис. 2.6.

Для того чтобы сформулировать и доказать этот факт для выпуклого множества в n-мерном пространстве, нам понадобится понятие, аналогичное понятию прямой на плоскости.

Определение 2.4. *Гиперплоскостью* в пространстве $\mathbf{R}^n$ называется множество точек $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, координаты которых удовлетворяют уравнению вида

$$p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n = c \qquad (\langle p, x\rangle = c).$$

Вектор $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ называется *нормалью* к этой гиперплоскости (предполагается, что $p \neq 0$).

Теорема 2.3 (о разделяющей гиперплоскости). *Пусть X — замкнутое, выпуклое множество, $a \notin X$, $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Тогда существует гиперплоскость с нормалью $p \neq 0$ такая, что $\langle p, a\rangle > c$ и для любого $x \in X$ выполняется неравенство $\langle p, x\rangle \leqslant c$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2$$

аргумента $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на множестве X. Эта функция, очевидно, непрерывна. Для того чтобы воспользоваться теоремой Вейерштрасса о том, что функция, непрерывная на ограниченном и замкнутом множестве, достигает на нем своей точной нижней грани, рассмотрим произвольную точку $\bar{x} \in X$ и шар U с центром в точке a, квадрат радиуса которого равен $\varphi(\bar{x})$ (рис. 2.7).

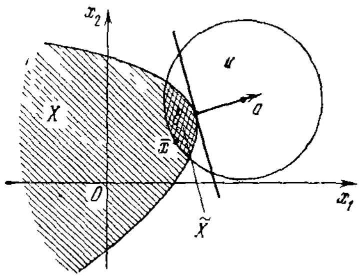

Рис. 2.7.

Пересечение $\tilde{X} = U \cap X$ является замкнутым и ограниченным множеством. Следовательно, функция $\varphi(x)$ достигает на нем минимума в некоторой точке $b \in \tilde{X}$. Ясно, что b является точкой минимума функции $\varphi(x)$ на всем множестве X. Таким образом, $\varphi(x) \geqslant \varphi(b)$ для всех $x \in X$. Зафиксируем произвольную точку $x \in X$ и рассмотрим отрезок

$$x(\alpha) = \alpha x + (1 - \alpha) b, \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1.$$

Поскольку множество X выпукло, то $x(\alpha) \in X$ при любом α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, и поэтому $\varphi(x(\alpha)) \geqslant \varphi(b)$. Следовательно, $\dfrac{\varphi(x(\alpha)) - \varphi(b)}{\alpha} \geqslant 0$ при всех α, $0 < \alpha \leqslant 1$. Функция $\varphi(x(\alpha))$ дифференцируема по α как суперпозиция двух дифференцируемых функций $\varphi(x)$ и $x(\alpha)$. Поэтому существует предел

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\varphi(x(\alpha)) - \varphi(b)}{\alpha} = \varphi'_\alpha(x(0)) \geqslant 0.$$

Производную $\varphi'_\alpha(x(0))$ можно вычислить непосредственно по правилу дифференцирования сложной функции:

$$\varphi'_\alpha(x(\alpha)) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i(\alpha) - a\ )^2\right)' = 2\sum_{i=1}^{n} (x_i(\alpha) - a_i)\, x'_i(\alpha).$$

Поскольку $x_i'(\alpha) = (\alpha x_i + (1-\alpha) b_i)' = x_i - b_i$, а $x_i(0) = b_i$, то

$$\varphi_\alpha'(x(\alpha)) = 2\sum_{i=1}^{n} (x_i(\alpha) - a_i)(x_i - b_i),$$

$$\varphi_\alpha'(x(0)) = 2\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)(x_i - b_i).$$

По доказанному выше, эта производная неотрицательна, т. е.

$$\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)(x_i - b_i) \geqslant 0.$$

Обозначим теперь $p_i = a_i - b_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$; $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$, $c = \sum_{i=1}^{n} b_i(a_i - b_i)$. Тогда полученное неравенство можно переписать следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leqslant c \qquad (\langle p, x\rangle \leqslant c).$$

Заметим, что вектор $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ и число c не зависят от выбранного нами вектора $x \in X$. Поэтому для того чтобы убедиться, что вектор p и число c удовлетворяют всем утверждениям теоремы, надо лишь проверить, что $p \neq 0$ и $\langle p, a\rangle > c$. В самом деле, $p = a - b$ и $p \neq 0$, так как в противном случае $a = b$, что невозможно, поскольку $b \in X$, $a \notin X$. Наконец,

$$\langle p, a\rangle - c = \sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i(a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)^2 > 0,$$

и значит, $\langle p, a\rangle > c$. Теорема доказана.

Заметим, что гиперплоскость $\langle p, x\rangle = c$, построенная в ходе доказательства теоремы, обладает еще и тем свойством, что она касается множества X в точке b: как нетрудно проверить, $\langle p, b\rangle = c$. В связи с этим введем

Определение 2.5. Гиперплоскость $\langle p, x\rangle = c$ называется *опорной* к множеству X в точке $b \in X$, если для всякого элемента $x \in X$ выполняются соотношения $\langle p, x\rangle \leqslant c$ и $\langle p, b\rangle = c$.

Таким образом, теорема о разделяющей гиперплоскости утверждает, что выпуклое замкнутое множество X можно отделить от любой точки $a \notin X$ с помощью опорной гиперплоскости.

В том случае, когда выпуклое множество X не является замкнутым, теорема об отделимости перестает выполняться, если точка a не принадлежит X, но принадлежит его замыканию. Однако здесь следует лишь слегка подправить формулировку: вместо неравенства $\langle p, a\rangle > c$ потребовать $\langle p, a\rangle \geqslant c$. Это вытекает из следующего вспомогательного утверждения: замыкание выпуклого множества само выпукло. В самом деле, пусть $x, \bar{x} \in \bar{X}$, где $\bar{X}$ — замыкание множества X. Пусть $x = \lim\limits_{k\to\infty} x^k$, $x^k \in X$, $\bar{x} = \lim\limits_{k\to\infty} \bar{x}^k$, $\bar{x}^k \in X$. Поскольку X выпукло, то $\alpha x^k + (1-\alpha)\bar{x}^k \in X$. При этом существует

$$\lim_{k\to\infty} \left(\alpha x^k + (1-\alpha)\bar{x}^k\right) = \alpha x + (1-\alpha)\bar{x},$$

который принадлежит $\bar{X}$ в силу замкнутости этого множества.

Пусть $a \notin X$. Нетрудно показать, что в таком случае существует последовательность a^k, $k = 1, 2, \ldots$, $a^k \notin \bar{X}$, $\lim\limits_{k\to\infty} a^k = a$. Применяя теорему о разделяющей гиперплоскости к множеству $\bar{X}$ и точке a^k, получаем гиперплоскость $\langle p^k, x\rangle = \langle p^k, b^k\rangle$. Рассмотрим параллельную ей гиперплоскость, проходящую через точку a^k: $\langle p^k, x\rangle = \langle p^k, a^k\rangle$. Без ограничения общности можно считать, что $\|p^k\| = 1$, $k = 1, 2, \ldots$, и что последовательность векторов p^k сходится к некоторому $p \neq 0$. При каждом k для любого $x \in X$ имеет место неравенство $\langle p^k, x\rangle \leqslant \langle p^k, a^k\rangle$, так как $\langle p^k, b^k\rangle \leqslant \langle p^k, a^k\rangle$. Переходя к пределу при $k \to \infty$, имеем $\langle p, x\rangle \leqslant \langle p, a\rangle$ для любого $x \in \bar{X}$, в частности, при $x \in X$.

Тем самым доказана следующая теорема о разделяющей гиперплоскости для незамкнутых выпуклых множеств.

Теорема 2.4. *Пусть X — выпуклое множество (не обязательно замкнутое) и пусть точка a не является внутренней для множества X. Тогда существует такая гиперплоскость $\langle p, x\rangle = c$, $p \neq 0$, что $\langle p, a\rangle = c$ и $\langle p, x\rangle \leqslant c$ для любого $x \in X$.*

Часто требуется отделить с помощью гиперплоскости два выпуклых множества. Следующая теорема утверждает возможность этого.

Назовем *положительным ортантом* пространства $\mathbf{R}^n$ множество $\mathbf{R}^n_+ = \{x \mid x \in \mathbf{R}^n, x \geqslant 0\}$ векторов $x = (x_1, x_2, \ldots \ldots, x_n)$, все координаты которых неотрицательны: $x_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Теорема 2.5. *Пусть X — выпуклое множество, не содержащее внутренних точек положительного ортанта $\mathbf{R}^n_+$ (т. е. в X нет точек, у которых все координаты положительны). Тогда существует такая гиперплоскость $\langle p, x\rangle = 0$ с неотрицательным вектором нормали $p \geqslant 0$, $p \neq 0$, что $\langle p, x\rangle \leqslant 0$ для любой точки $x \in X$.*

Доказательство. Рассмотрим множество $M = X - \mathbf{R}^n_+$. Ясно, что точка 0 не является внутренней для M. В самом деле, пусть 0 — внутренняя точка. Тогда существует окрестность (шар) около начала координат, принадлежащая M. В этой окрестности найдется точка u, все координаты которой положительны: $u > 0$. Поскольку $u \in M$, то $u = x - v$, где $x \in X$, $v \in \mathbf{R}^n_+$. Тогда $x = u + v > 0$, что противоречит условию теоремы.

Учитывая теперь теорему 2.4, можно утверждать, что существует такая гиперплоскость $\langle p, x\rangle = 0$, $p \neq 0$, проходящая через начало координат, что для всякой точки $u \in M$ имеет место неравенство $\langle p, u\rangle \leqslant 0$. Вспоминая определение M, заключаем, что для любого $x \in X$ и для $v \in \mathbf{R}^n_+$ выполняется $\langle p, x\rangle \leqslant \langle p, v\rangle$. Положив в этом неравенстве $v = \mathbf{0}$, получаем неравенство $\langle p, x\rangle \leqslant 0$ для любого $x \in X$.

Зафиксировав теперь какую-нибудь точку $x \in X$, получаем неравенство $\langle p, v\rangle \geqslant \langle p, x\rangle$ для любого $v \in \mathbf{R}^n_+$. Из этого, конечно, вытекает, что $p \geqslant 0$. Действительно, если $p_i < 0$, то взяв в качестве v точку вида $(0, 0, \ldots \ldots, 0, \lambda, 0, \ldots, 0)$, где $\lambda > 0$ стоит на i-м месте, получим неравенство $\lambda p_i \geqslant \langle p, x\rangle$. Однако число λp_i можно сделать сколь угодно малым отрицательным числом, во всяком случае меньше, чем фиксированное число $\langle p, x\rangle$.

3. Часто представляет интерес случай, когда нормаль p, фигурирующую в теореме 2.5, можно выбрать положительной. Может показаться, что для этого достаточно потребовать, чтобы пересечение $X \cap \mathbf{R}^n_+$ было либо пусто, либо состояло только из нулевого вектора. Это, однако, не так, как следует из рис. 2.9, приведенного далее.

Однако существует весьма важный класс выпуклых множеств, для которого можно уточнить формулировку теоремы 2.5.

Определение 2.6. Множество $K \subseteq \mathbf{R}^n$ называется *выпуклым конусом*, если вместе с любыми своими точками x', x'' оно содержит и все точки вида $x = \alpha x' + \beta x''$, $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$.

Из этого определения непосредственно следует, что выпуклый конус K, во-первых, является выпуклым множеством (см. определение 2.1), и во-вторых, вместе с вектором x содержит луч αx, $\alpha \geqslant 0$. Очевидно, что всякий выпуклый конус K содержит начало координат.

Теорема 2.6. *Всякая гиперплоскость, опорная к выпуклому конусу K, проходит через начало координат.*

Доказательство. Пусть гиперплоскость $\langle p, x\rangle = c$ является опорной к конусу K в точке $b \in K$: для всякого $x \in K$ $\langle p, x\rangle \leqslant c$, $\langle p, b\rangle = c$. Рассмотрим точку αb, где $\alpha \geqslant 0$. По определению конуса $\alpha b \in K$, следовательно, $\langle p, \alpha b\rangle \leqslant c$. Поскольку $\langle p, \alpha b\rangle = \alpha\langle p, b\rangle = \alpha c$, то неравенство $\alpha c \leqslant c$ выполняется для любого $\alpha \geqslant 0$. Отсюда $(\alpha - 1)c \leqslant 0$. При $\alpha = 0$ получаем $c \geqslant 0$, а при $\alpha = 2$ получаем $c \leqslant 0$. Таким образом, $c = 0$, уравнение опорной гиперплоскости имеет вид $\langle p, x\rangle = 0$ и точка 0 принадлежит этой гиперплоскости. Теорема доказана.

Понятие выпуклого конуса играет исключительно важную роль при исследовании задач линейного программирования. Этот частный класс выпуклых множеств обладает рядом специфических особенностей.

Рассмотрим примеры, изображенные на рис. 2.8—2.10. На рис. 2.8 изображен заштрихованный выпуклый конус K, не имеющий общих точек с внутренностью положительного ортанта $\mathbf{R}^2_+$. Как следует из теоремы 2.5, его можно отделить от $\mathbf{R}^2_+$ с помощью гиперплоскости, нормаль к которой имеет неотрицательные координаты. Более того, как видно из рисунка, можно выбрать разделяющую гиперплоскость так, чтобы нормаль к ней была положительным вектором.

Иная ситуация на рис. 2.9. Здесь выпуклое множество X представляет собой круг радиуса 1 с центром в точке $(-1, 0)$. Единственная гиперплоскость, отделяющая множество X от $\mathbf{R}^2_+$, имеет нормаль $(1, 0)$. Таким образом, в этом случае не существует разделяющей гиперплоскости с положительной нормалью.

Рассмотрим выпуклый конус, изображенный на рис. 2.10, представляющий собой левую полуплоскость вместе с точкой 0, но не включающую остальных точек оси $0x_2$. Этот выпуклый конус так же, как и конус на рис. 2.8, не содержит ни одной точки неотрицательного ортанта $\mathbf{R}^2_+$, кроме точки 0, однако его нельзя отделить от $\mathbf{R}^2_+$ с помощью гиперплоскости, имеющей положительную нормаль. Дело здесь, конечно, в том, что данный конус не является замкнутым.

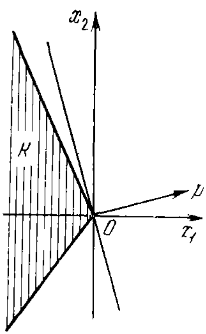

Рис. 2.8.

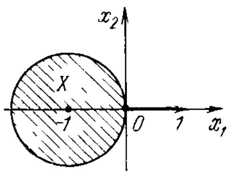

Рис. 2.9.

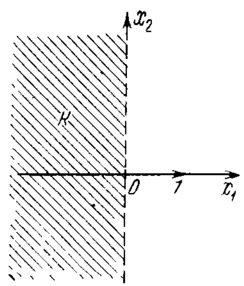

Рис. 2.10.

При изучении свойств выпуклых конусов является полезной следующая конструкция.

Определение 2.7. Выпуклым конусом K^*, *двойственным* к выпуклому конусу K, называется множество

$$K^* = \{p \mid p \in \mathbf{R}^n,\ \langle p, x\rangle \leqslant 0 \text{ для всех } x \in K\}.$$

Иллюстрацией этого понятия служат рис. 2.11, 2.12, где штриховой линией обозначены образующие конусов K^*, двойственных к конусам K (они заштрихованы). Другими словами, конус K^* состоит из векторов p, каждый из которых составляет неострый угол с любым из векторов конуса K. Поэтому на рис. 2.11, 2.12 образующими конусов K^* служат лучи, перпендикулярные к образующим конуса K. Предоставляем читателю доказать утверждение, что K^* — выпуклый конус (см. упр. 12).

Теорема 2.7. *Двойственный конус K^* замкнут.*

Доказательство. Пусть последовательность $p^1, p^2, \ldots, p^k, \ldots$ состоит из векторов, принадлежащих конусу K^*, и имеет предел $\lim\limits_{k\to\infty} p^k = p$. Покажем, что $p \in K^*$, т. е. что $\langle p, x\rangle \leqslant 0$ для любого вектора $x \in K$.

Поскольку $p^k \in K^*$, то $\langle p^k, x\rangle \leqslant 0$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $k \to \infty$ и используя свойство

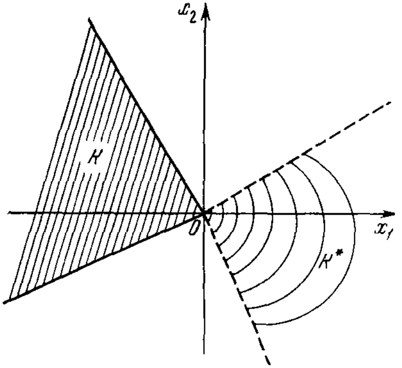

Рис. 2.11.

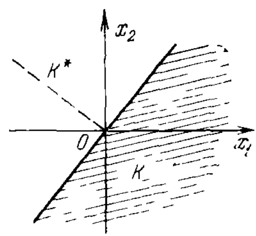

Рис. 2.12.

непрерывности скалярного произведения (в данном случае, непрерывность линейной функции), получаем $\langle p, x\rangle \leqslant 0$.

Конусу K^* можно, в свою очередь, сопоставить двойственный конус $(K^*)^*$, который мы будем обозначать $K^{**} = (K^*)^*$.

Следующий геометрически очевидный факт является ключевым.

Теорема 2.8 (теорема двойственности для выпуклых конусов).

1) $K^{**} \supseteq K$;

2) *если выпуклый конус K замкнут, то $K^{**} = K$.*

Доказательство. 1) Из определения K^* следует, что $\langle x, p\rangle \leqslant 0$ для любой точки $x \in K$ и $p \in K^*$. Следовательно, $x \in K^{**}$, т. е. $K \subseteq K^{**}$.

2) Поскольку уже доказано, что $K \subseteq K^{**}$, остается проверить лишь обратное включение $K \supseteq K^{**}$ в том случае, когда конус K замкнут. Допустим, что $a \notin K$. Если мы покажем, что тогда $a \notin K^{**}$, то доказательство теоремы будет закончено. К замкнутому конусу K и точке $a \notin K$ можно применить теорему о разделяющей гипер-

плоскости с учетом теоремы 2.6 о том, что всякая гиперплоскость, опорная к конусу, проходит через 0. Пусть p — нормальный вектор гиперплоскости, разделяющей множество K и точку a. Тогда $\langle x, p\rangle \leqslant 0$ для всякой точки $x \in K$ и $\langle p, a\rangle > 0$. Отсюда вытекает, что $p \in K^*$, и поэтому $a \notin K^{**}$, поскольку скалярное произведение векторов a и $p \in K^*$ больше нуля.

Теорема 2.9. *Если замкнутый выпуклый конус K не содержит неотрицательного вектора, отличного от нуля* (*т. е.* $K \cap \mathbf{R}^n_+ = 0$), *то K^* содержит положительный вектор $p > 0$.*

Доказательство. Допустим противное, т. е. что конус K^* не содержит положительных векторов. Тогда к K^* можно применить теорему 2.5 о том, что существует неотрицательный вектор $p \geqslant 0$, $p \neq 0$, причем $\langle p, x\rangle \leqslant 0$ для всех $x \in K^*$. По определению двойственного конуса, это означает, что $p \in K^{**}$. Поскольку конус K замкнут, то по предыдущей теореме $K = K^{**}$ и, значит $p \in K$, что противоречит предположению теоремы.

Теперь мы в состоянии уточнить результат теоремы 2.5 об отделимости.

Теорема 2.10. *Пусть K — выпуклый замкнутый конус, пересекающийся с $\mathbf{R}^n_+$ только по нулевому вектору. Тогда существует такой положительный вектор $p > 0$, что $\langle p, x\rangle \leqslant 0$ для любого $x \in K$.*

Доказательство непосредственно вытекает из предыдущей теоремы и определения двойственного конуса.

§ 3. Многогранные выпуклые множества

1. Здесь будет подробно изучен специальный класс выпуклых множеств, отвечающий геометрическому представлению о многогранниках.

Определение 2.8. Пусть $x^1, x^2, \ldots, x^k$ — произвольные точки из $\mathbf{R}^n$. *Выпуклой линейной комбинацией* этих точек называется сумма вида $\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_k x^k$, где α_i, $i = 1, 2, \ldots, k$,— произвольные неотрицательные числа, сумма которых равна 1: $\alpha_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$, $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$.

Согласно определению 2.1 множество X называется выпуклым, если оно содержит выпуклую линейную комбинацию любых двух своих точек.

Теорема 2.11. *Пусть X — выпуклое множество, $x^1, x^2, \ldots, x^k$ — произвольные точки из X. Тогда множество X содержит любую выпуклую линейную комбинацию этих точек.*

Доказательство проведем с помощью полной математической индукции по числу точек k. При $k = 2$ утверждение теоремы совпадает с определением выпуклого множества.

Пусть уже доказано, что любая выпуклая линейная комбинация $k-1$ точек множества X ему принадлежит. Рассмотрим k точек $x^1, x^2, \ldots, x^{k-1}, x^k$ и выпуклую линейную комбинацию $x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x^i$. Если $\alpha_k = 1$, то $\alpha_i = 0$ при $1 \leqslant i \leqslant k-1$ и $x = x^k \in X$. Пусть $\alpha_k < 1$. Тогда $1 - \alpha_k = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i > 0$. Сгруппируем слагаемые в выражении для x:

$$x = (1 - \alpha_k) \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_k} x^i + \alpha_k x^k.$$

Числа $\alpha_i/(1 - \alpha_k)$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$, неотрицательны и их сумма равна 1:

$$\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_k} = \frac{1}{1 - \alpha_k} \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i = \frac{1}{1 - \alpha_k} (1 - \alpha_k) = 1.$$

Следовательно, выражение $x' = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_k} x^i$ представляет собой выпуклую линейную комбинацию точек $x^1, x^2, \ldots, x^{k-1}$ множества X. По предположению индукции $x' \in X$. Но в таком случае точка $x = (1 - \alpha_k)x' + \alpha_k x^k$ является выпуклой линейной комбинацией двух точек из X и, следовательно, $x \in X$.

Определение 2.9. Пусть M — множество точек из $\mathbf{R}^n$ (конечное или бесконечное). *Выпуклой оболочкой* $C(M)$ множества M называется множество всех выпуклых линейных комбинаций точек из M.

В качестве примеров рассмотрим множества M_1 и M_2: M_1 состоит из трех различных точек (A, B, C) плоскости (рис. 2.13); M_2 есть окружность (рис. 2.14).

Нетрудно видеть, что выпуклой оболочкой множества M_1 является треугольник ABC (вместе с внутренними точками). Действительно, пусть D — произвольная точка треугольника. Проведем через D и C прямую и пусть E — пересечение этой прямой и отрезка $[A, B]$. Тогда точка E является выпуклой линейной комбинацией точек A и B: $E = \alpha A + (1-\alpha)B$, где $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Точка D принадлежит отрезку $[E, C]$ и поэтому представима в виде $D = \beta E + (1-\beta)C$, $0 \leqslant \beta \leqslant 1$. Отсюда $D = \beta(\alpha A + (1-\alpha)B) + (1-\beta)C = \alpha\beta A + (1-\alpha)\beta B + (1-\beta)C$. Правая часть этого выражения является выпуклой линейной комбинацией

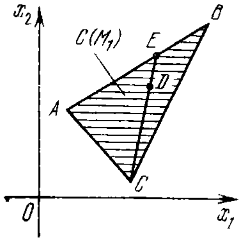

Рис. 2.13.

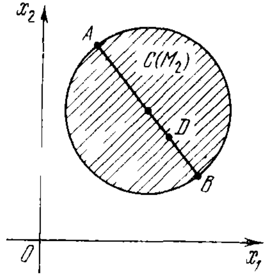

Рис. 2.14.

точек A, B, C, поскольку $\alpha\beta + (1-\alpha)\beta + (1-\beta) = 1$. Следовательно, любая точка треугольника ABC принадлежит выпуклой оболочке множества M_1.

Выпуклой оболочкой множества M_2 является круг, границей которого служит окружность M_2. В самом деле, любая точка D круга может быть представлена как выпуклая линейная комбинация точек A и B окружности, лежащих на концах диаметра, проведенного через точку D.

Тот факт, что выпуклые оболочки множеств M_1 и M_2 не содержат других точек, кроме указанных, вытекает из следующей теоремы.

Теорема 2.12. *Выпуклая оболочка $C(M)$ множества M совпадает с наименьшим выпуклым множеством, содержащим M.*

Доказательство очевидно, поскольку, с одной стороны, ясно, что выпуклая оболочка $C(M)$ является выпуклым множеством, а с другой стороны, если X — выпуклое множество, содержащее M, то оно содержит и все выпуклые линейные комбинации точек из M, т. е. $X \supseteq C(M)$.

В примерах с множествами M_1 и M_2 видно, что любую точку множеств $C(M_1)$ и $C(M_2)$ можно выразить через крайние точки: A, B, C в первом примере и точки окружности — во втором.

Определение 2.10. Точка x выпуклого множества X называется *крайней*, если ее нельзя представить в виде $x = \frac{1}{2} x^1 + \frac{1}{2} x^2$, где $x^1 \neq x^2$, $x^1 \in X$, $x^2 \in X$.

Отметим, что не всякое выпуклое множество имеет крайние точки. Так, замкнутая верхняя полуплоскость является выпуклым множеством, имеет граничные точки (все точки прямой, определяющей эту полуплоскость), но не имеет крайних точек.

Напомним, что ограниченное и замкнутое множество называется *компактным*. Выпуклые компактные множества устроены достаточно просто, как показывает

Теорема 2.13. *Любое компактное выпуклое множество в* $\mathbf{R}^n$ *является выпуклой оболочкой своих крайних точек.*

Это утверждение означает, что любая точка $x \in X$, где X — выпуклый компакт, представима в виде выпуклой комбинации конечного числа крайних точек из X. Наличие крайних точек у выпуклого компакта доказывается несложно (см. упр. 6).

Нетрудно также доказать, что любая точка x выпуклого компакта X является выпуклой линейной комбинацией некоторых его граничных точек, В самом деле, пусть s — любой вектор, $s \in \mathbf{R}^n$. Рассмотрим прямую $l(x) = x + \lambda s$, $-\infty < \lambda < \infty$, проходящую через точку x (при $\lambda = 0$). Поскольку X — ограниченное выпуклое множество, то прямая $l(x)$ пересекает его границу в двух точках x^1 и x^2 (может быть, совпадающих). Тогда точка $x \in X$ принадлежит отрезку $[x^1, x^2]$ и, следовательно, является выпуклой линейной комбинацией граничных точек x^1 и x^2 множества X.

Таким образом, для доказательства теоремы 2.13 остается лишь показать, что всякая граничная точка x^0 является выпуклой линейной комбинацией конечного числа крайних точек X. Для доказательства этого геометрически ясного факта введем понятие размерности выпуклого множества.

Напомним, что *линейным многообразием* $Q \subseteq \mathbf{R}^n$ называется множество вида $Q = x^0 + L$, где L — некоторое подпространство. Из курса линейной алгебры известно, что если $Q = x' + L'$, где L' — подпространство, то $L = L'$, т. е. линейному многообразию Q соответствует только одно подпространство L, сдвигом которого получается Q.

Размерностью линейного многообразия $Q = x^0 + L$ называется размерность подпространства L.

На рис. 2.15 линейное многообразие Q получено параллельным сдвигом подпространства L: произвольная точка $x \in Q$ представима в виде $x = x^0 + l$, где $l \in L$. Ясно, что точку x^0 можно выбрать разными способами. Здесь размерность Q равна 1.

Поскольку $\mathbf{R}^n$ также является линейным многообразием (размерности n), $x^0 = 0$, $L = \mathbf{R}^n$, то всякое выпуклое множество $X \subseteq \mathbf{R}^n$ принадлежит линейному многообразию размерности n.

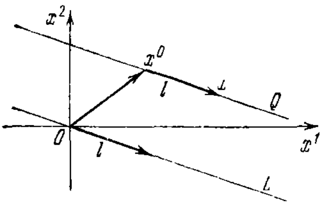

Рис. 2.15.

Назовем *размерностью выпуклого множества* $X \subseteq \mathbf{R}^n$ минимальную из размерностей линейных многообразий, содержащих X. Так, размерность отрезка $[A, B]$ (рис. 2.13) равна 1, размерность выпуклого множества, состоящего только из точки A, равна 0, размерность треугольника ABC равна 2. Если размерность выпуклого множества X равна k, то можно считать, что $X \subseteq \mathbf{R}^k$,— для этого надо взять линейное многообразие Q, $X \subseteq Q$, размерности k и выбрать в $Q = x^0 + L$ систему координат вида $x^0 + l_1$, $x^0 + l_2$, ..., $x^0 + l_k$, где $\{l_1, l_2, \ldots$ $\ldots, l_k\}$ — базис в L. Тогда Q превращается в линейное пространство размерности k. Так, на рис. 2.15 можно взять за начало координат в Q точку x^0, а за базис — вектор l; тогда Q превращается в $\mathbf{R}^1$.

Отметим еще один очевидный факт, связанный с понятием размерности выпуклого множества. Пусть X имеет размерность k и $X \subseteq \mathbf{R}^k$. Тогда пересечение X с любой гиперплоскостью $P = \{x \mid \langle p, x\rangle = d\}$, где $p \in \mathbf{R}^k$, $p \neq 0$, имеет размерность не больше чем $k - 1$. Действительно, пусть $\tilde{L} = \{x \mid \langle p, x\rangle = 0\}$. Тогда, как легко видеть, размерность $\tilde{L}$ равна $k - 1$. Поскольку $P \cap X \subseteq x^0 + \tilde{L}$, то $P \cap X$ по определению имеет размерность не больше $k - 1$ ($x^0 \in P \cap X$).

Доказательство теоремы 2.13. Проведем индукцию по размерности k множества X. Если $k = 0$, то X является точкой и утверждение теоремы в данном случае тривиально. Пусть для множеств размерности, меньшей k, теорема доказана и пусть X имеет размерность k. Обозначим через a произвольную граничную точку множества X (граничные точки существуют, поскольку X — компакт).

Тогда по теореме 2.4 существует такая гиперплоскость $\langle p, x\rangle = \langle p, a\rangle$, что $\langle p, x\rangle \leqslant \langle p, a\rangle$ для любого $x \in X$.

Пересечение X_a множества X и этой гиперплоскости представляет собой непустое компактное и выпуклое множество (поскольку гиперплоскость выпукла и содержит точку $a \in X$). Множество X_a имеет размерность меньше k и, по предположению индукции, является выпуклой оболочкой своих крайних точек. При этом всякая крайняя точка c множества X_a является крайней точкой и множества X. В самом деле, пусть это не так и $c = \alpha x^1 + (1-\alpha)x^2$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, x^1, $x^2 \in X$. Поскольку c принадлежит гиперплоскости, то $0 = \langle p, c - a\rangle = \alpha\langle p, x^1 - a\rangle + (1-\alpha)\langle p, x^2 - a\rangle$. Поскольку $\langle p, x^1 - a\rangle \leqslant 0$, $\langle p, x^2 - a\rangle \leqslant 0$, то $\langle p, x^1 - a\rangle = 0$, $\langle p, x^2 - a\rangle = 0$, т. е. $x^1 \in X_a$, $x^2 \in X_a$. Но точка c — крайняя в X_a; итак, $x^1 = c$, $x^2 = c$.

Таким образом, мы доказали, что всякая граничная точка a множества X является выпуклой линейной комбинацией его крайних точек, что и доказывает теорему.

Определение 2.11. Множество X называется *выпуклым многогранником*, если оно является выпуклой оболочкой конечного множества точек.

Другими словами, множество X называется *выпуклым многогранником*, если оно содержит конечное число таких точек $x^1, x^2, \ldots, x^k$, что любая точка $x \in X$ представима в виде

$$x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x^i, \quad 0 \leqslant \alpha_i \leqslant 1, \quad \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$$

и X содержит все точки такого вида.

Теорема 2.14. *Выпуклый многогранник компактен.*

Доказательство. Пусть X — выпуклый многогранник, являющийся выпуклой оболочкой своих точек $x^1, x^2, \ldots, x^k$: $X = C(x^1, x^2, \ldots, x^k)$. Для доказательства компактности множества X достаточно показать, что из произвольной последовательности $x(m) \in X$, $m = 1, 2, \ldots$, можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторому $\bar{x} \in X$. Так как $x(m) \in X$, $m = 1, 2, \ldots$, то $x(m) = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i(m)\, x^i$, $0 \leqslant \alpha_i(m) \leqslant 1$, $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i(m) = 1$. Каждая последовательность $\alpha_i(m)$, $m = 1, 2, \ldots$, ограничена; следовательно, из нее можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Поскольку последовательностей $\{\alpha_i(m)\}$ — конечное число $(i = 1, 2, \ldots, k)$, то можно выбрать такую подпоследовательность номеров $m_1, m_2, \ldots$, что все последовательности $\alpha_i(m_j)$, $j=1, 2, \ldots$, сходятся. Пусть $\lim\limits_{j\to\infty} \alpha_i(m_j) = \alpha_i \geqslant 0$. Очевидно, $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$. Тогда последовательность $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i(m_j) x^i$, $j=1, 2, \ldots$, сходится и при этом

$$\bar{x} = \lim_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(m_j) x^i = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x^i \in X.$$

Теорема доказана.

Из этой теоремы и теоремы 2.13 вытекает, что выпуклый многогранник является выпуклой оболочкой множества своих крайних точек. Если $M = C(x^1, x^2, \ldots, x^k)$ — выпуклая оболочка множества точек $S = \{x^1, x^2, \ldots, x^k\}$, то ясно, что крайними точками в M могут быть лишь точки из S (возможно, не все).

Полученные результаты достаточно наглядно описывают структуру выпуклых многогранников, т. е. замкнутых ограниченных выпуклых множеств, имеющих конечное число крайних точек.

2. Перейдем к изучению другого важного класса выпуклых множеств — многогранных конусов.

Определение 2.12. Пусть $M \subseteq \mathrm{R}^n$ — произвольное множество. *Конической оболочкой* $\mathrm{Co}(M)$ назовем множество всевозможных неотрицательных линейных комбинаций $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i x^i$ точек из M.

Нетрудно показать, что коническая оболочка $\mathrm{Co}(M)$ является наименьшим выпуклым конусом, содержащим множество M (см. упр. 17). На рис. 2.16 заштриховано множество $\mathrm{Co}(M)$, где множество M состоит из трех векторов g^1, g^2, g^3. На рис. 2.17 множество M представляет собой окружность.

Определение 2.13. Выпуклый конус K называется *многогранным*, если он представляет собой коническую оболочку конечного числа своих точек.

Замкнутость многогранного конуса интуитивно очевидна, однако, чтобы это доказать нам потребуется

Лемма 2.1. *Пусть вектор $x \neq 0$ является неотрицательной линейной комбинацией векторов $x^1, x^2, \ldots, x^k$: $x = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i x^i$, $\alpha_i \geqslant 0$, $i=1, 2, \ldots, k$. Тогда вектор x мож-*

но представить в виде неотрицательной линейной комбинации некоторого числа линейно независимых векторов из множества $\{x^1, x^2, \ldots, x^k\}$.

Доказательство. Проведем индукцию по k. При $k=1$ утверждение леммы очевидно. Пусть для чисел, меньших k, лемма доказана. Если хотя бы одно из чисел

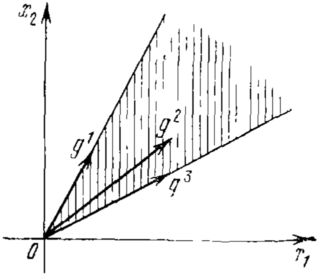

Рис. 2.16.

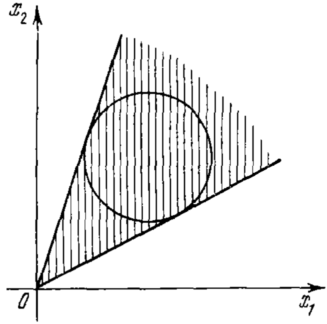

Рис. 2.17.

α_i в формулировке леммы равно 0, то применимо предположение индукции. Поэтому можно считать, что $\alpha_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Пусть векторы $x^1, x^2, \ldots, x^k$ линейно зависимы, т. е. $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i = 0$, где не все λ_i равны нулю. Будем предполагать, что среди λ_i имеются положительные числа (в противном случае мы умножим все λ_i на -1).

Пусть $\theta = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant k} (\lambda_i/\alpha_i)$. Ясно, что $\theta > 0$; пусть для определенности $\theta = \lambda_1/\alpha_1$. Тогда

$$x = x - \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x^i - \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i = \sum_{i=1}^{k} \left(\alpha_i - \frac{1}{\theta} \lambda_i\right) x^i.$$

Коэффициенты $\alpha_i - \lambda_i/\theta$ неотрицательны, так как $\theta \geqslant \lambda_i/\alpha_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, при этом $\alpha_1 - \lambda_1/\theta = 0$. Следовательно, вектор x выражается в виде неотрицательной линейной комбинации векторов $x^2, x^3, \ldots, x^k$ в количестве $k-1$. Согласно предположению индукции, его можно выразить через линейное независимое подмножество этих векторов.

Теорема 2.15. *Многогранный выпуклый конус замкнут.*

Доказательство. Пусть $K = \mathrm{Co}(x^1, x^2, \ldots, x^k)$. Рассмотрим вначале случай, когда система векторов x^i, $i = 1, 2, \ldots, k$, линейно независима. Пусть L — k-мерное линейное подпространство в R^n, натянутое на эти векторы. Тогда $x^1, x^2, \ldots, x^k$ — базис подпространства L. Как известно из линейной алгебры, в L можно таким образом ввести скалярное произведение, чтобы данный базис оказался ортонормированным. После этого подпространство L можно отождествить с R^k, а K — с R^k_+. Очевидно, что множество R^k_+ замкнуто, а поэтому замкнут и конус K относительно нормы, соответствующей выбранному скалярному произведению. Воспользуемся эквивалентностью норм. Обратимся к случаю, когда совокупность векторов $x^1, x^2, \ldots, x^k$ линейно зависима. Возьмем произвольную линейно независимую подсистему $x^{i_1}, x^{i_2}, \ldots, x^{i_s}$ этой совокупности и рассмотрим конус $K_\sigma = \mathrm{Co}\left(x^{i_1}, x^{i_2}, \ldots, x^{i_s}\right)$, где σ — набор $\sigma = \{i_1, i_2, \ldots, i_s\}$. По доказанному выше, конус K_σ замкнут. Покажем справедливость равенства $K = \bigcup\limits_\sigma K_\sigma$, где объединение берется по всем наборам σ, соответствующим линейно независимым подсистемам системы векторов $x^1, x^2, \ldots, x^k$. В самом деле, включение $K \supseteq \bigcup\limits_\sigma K_\sigma$ очевидно. Обратное включение вытекает из леммы 2.1. Доказательство теоремы теперь получается из того простого факта, что объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто.

Следствие. *Для многогранного выпуклого конуса K справедливо равенство $K = K^{**}$.*

Это утверждение вытекает из доказанной замкнутости конуса и теоремы двойственности для выпуклых конусов.

Понятие крайней точки, чрезвычайно полезное при выяснении структуры выпуклых многогранников, оказывается бесполезным при изучении выпуклых конусов — нетрудно видеть, что конус может иметь не более одной крайней точки. В связи с этим введем в рассмотрение новый объект.

Определение 2.14. Вектор $x \neq 0$, $x \in K$, называется *крайним* для выпуклого конуса K, если из того, что $x = 1/2x^1 + 1/2x^2$, где $x^1, x^2 \in K$, вытекает, что $x^1 = \lambda x$, $x^2 = \mu x$ для некоторых $\lambda \geqslant 0$, $\mu \geqslant 0$.

Наглядный смысл этого определения понятен. Так, на рис. 2.14 крайними являются векторы g^1, g^3. Если конус K представляет собой замкнутую верхнюю полуплоскость в пространстве $\mathbf{R}^2$: $K=\{x \mid x=(x_1,\ x_2),\ x_2 \geqslant 0\}$, то в нем крайними служат, например, векторы $(1,\ 0)$, $(-1,\ 0)$.

Ясно, что если вектор $x \in K$ — крайний, то крайним является также любой вектор μx, $\mu > 0$. В этом случае условимся говорить, что вектор x принадлежит крайнему лучу μx, $\mu > 0$. Хотелось бы, конечно, получить для многогранных конусов описание, подобное теореме 2.13 для компактных выпуклых множеств, и утверждать, что многогранный конус является конической оболочкой своих крайних векторов. Однако этот факт неверен. Так, существуют выпуклые многогранные конусы, у которых вообще нет крайних векторов. Примером может служить вся плоскость $\mathbf{R}^2$, или конус в пространстве $\mathbf{R}^3$, задаваемый неравенством $x_3 \geqslant 0$. Этот конус является многогранным: он совпадает с конической оболочкой векторов $(0,\ 0,\ 1)$, $(1,\ 0,\ 0)$, $(-1,\ 0,\ 0)$, $(0,\ 1,\ 0)$, $(0,\ -1,\ 0)$, однако в нем нет крайних.

Тем не менее имеет место следующий очевидный факт.

Лемма 2.2. *Пусть* $K=\mathrm{Co}(x^1,\ x^2,\ \ldots,\ x^k)$ *и пусть* $\{c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_s\}$ — *множество всех крайних векторов конуса* K, *принадлежащих различным крайним лучам. Тогда среди векторов* x^j, $j=1,\ 2,\ \ldots,\ k$, *обязательно найдутся* s *векторов, принадлежащих этим крайним лучам.*

Приведенные выше примеры конусов, у которых нет крайних векторов, подсказывают причину этого явления — эти конусы содержат некоторое подпространство. Чтобы формализовать этот факт, введем

Определение 2.15. Выпуклый конус K называется *заостренным*, если из того, что $x \in K$ и $-x \in K$, вытекает, что $x=0$.

Это определение в точности соответствует тому требованию, чтобы конус K не содержал никакого линейного подпространства пространства $\mathbf{R}^n$. Так, конусы на рис. 2.16, 2.17 являются заостренными.

Лемма 2.3. *Пусть* $x^1,\ x^2,\ \ldots,\ x^k$ — *ненулевые векторы. Если конус* $K=\mathrm{Co}(x^1,\ x^2,\ \ldots,\ x^k)$ *заострен, то векторы* $x^1,\ x^2,\ \ldots,\ x^k$ *положительно линейно независимы, т. е. из условий* $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_j x^j = 0,\quad \lambda_j \geqslant 0,\qquad j=1,\ 2, \ldots,\ k$, *вытекает, что* $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_k=0$.

Доказательство. Проведем индукцию по k. При $k=1$ утверждение очевидно, поскольку x^1 по предположению — ненулевой вектор.

Пусть для чисел, меньших k, лемма доказана. Допустим, что $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j x^j = 0$, $\lambda_j \geqslant 0, j = 1, 2, \ldots, k$. Тогда $\lambda_1 x^1 = -\sum_{j=2}^{k} \lambda_j x^j$. Поскольку $\sum_{j=2}^{j} \times \lambda_j x^j \in K$, $\lambda_1 x^1 \in K$, то, согласно определению заостренного конуса, $\lambda_1 x^1 = = 0 = \sum_{j=2}^{k} \lambda_j x^j$. Тогда $\lambda_1 = 0$ и, по предположению индукции, $\lambda_2 = \lambda_3 = \ldots = \lambda_k = 0$.

Теорема 2.16. *Многогранный заостренный конус K является конической оболочкой конечного множества своих крайних векторов.*

Доказательство. Пусть $K = \mathrm{Co}(x^1, x^2, \ldots, x^k)$. Среди векторов $x^1, x^2, \ldots, x^k$ вычеркнем тот, который можно представить в виде неотрицательной линейной комбинации остальных. Если это возможно, то из оставшихся $k-1$ векторов можно снова вычеркнуть один из векторов, являющийся неотрицательной линейной комбинацией остальных $k-2$ векторов. Продолжая действовать подобным образом, мы придем к набору векторов, например, $x^1, x^2, \ldots, x^r$ $(r \leqslant k)$, обладающему следующими свойствами: $K = \mathrm{Co}(x^1, x^2, \ldots, x^r)$; никакой из векторов x^j, $1 \leqslant j \leqslant r$, не является неотрицательной линейной комбинацией остальных.

Покажем, что все векторы этого множества являются крайними. Допустим, что x^1 — не крайний. Тогда $x^1 = = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j x^j$, где все $\alpha_j \geqslant 0$. Отсюда $(1-\alpha_1) x^1 = \sum_{j=2}^{r} \alpha_j x^j$.

Если $\alpha_1 > 1$, то $(1-\alpha_1)x^1 \in K$ и $(\alpha_1 - 1)x^1 \in K$, т. е. $x^1 = 0$; если $\alpha_1 = 1$, то $\sum_{j=2}^{r} \alpha_j x^j = 0$, чего не может быть в силу леммы 2.3 и поскольку, очевидно, среди векторов x^j, $j = 1, 2, \ldots, r$, нет нулевых.

В случае же $\alpha_1 < 1$ имеем $x^1 = \dfrac{1}{1-\alpha_1} \sum_{j=2}^{r} \alpha_j x^j$, т. е. x^1 является неотрицательной линейной комбинацией векторов $x^2, x^3, \ldots, x^r$, что невозможно. Таким образом, теорема доказана.

Сделаем замечание по поводу различия понятий крайней точки выпуклого множества (определение 2.10) и крайнего вектора выпуклого конуса (определение 2.14). Главным отличием здесь является то, что вектор 0 может являться крайней точкой конуса и не может быть крайним вектором. В то же время очевидно, что точка 0 является крайней для заостренного конуса K. В самом деле, пусть $0 = 1/2x' + 1/2x''$, где $x', x'' \in K$. Отсюда $x'' = -x'$, что противоречит определению заостренного конуса.

§ 4. Структура допустимых множеств задач линейного программирования

1. Мы приступаем к систематическому изучению структуры допустимых множеств задач линейного программирования. Как следует из § 2 гл. I, допустимое множество описывается системой линейных неравенств вида

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &\leqslant b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &\leqslant b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &\leqslant b_m. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Мы не выделяем здесь ограничения вида $x_i \geqslant 0$, считая, что если они присутствуют, то включены в систему неравенств (2.3) в форме $-x_i \leqslant 0$.

В дальнейшем будем обозначать символом a_i вектор $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ — i-строку матрицы A коэффициентов системы (2.3), а символом a^j — вектор $a^j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots$ $\ldots, a_{mj})$ — j-й столбец матрицы A.

Тогда систему неравенств (2.3) можно переписать в более компактном виде

$$\langle a_1, x\rangle \leqslant b_1, \ \langle a_2, x\rangle \leqslant b_2, \ \ldots, \ \langle a_m, x\rangle \leqslant b_m, \tag{2.4}$$

где, как и раньше, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Наконец, с помощью обозначения $A = (a_{ij})$, $i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, система неравенств (2.3) записывается в виде

$$Ax \leqslant b, \tag{2.5}$$

где $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$.

Всюду далее в этой главе будем обозначать через X *множество допустимых векторов*, т. е. множество всех векторов x, удовлетворяющих системе неравенств (2.3): $X = \{x \in \mathrm{R}^n \mid Ax \leqslant b\}$. Может оказаться, что множество X

допустимых векторов пусто. В качестве самого простого примера приведем множество в $\mathbf{R}^1$, задаваемое ограничениями $x_1 \leqslant 1$, $-x_1 \leqslant -2$. В связи с этим оговорим заранее, что все утверждения этого параграфа о тех или иных свойствах множества X относятся к тому случаю, когда X не является пустым множеством.

Теорема 2.17. *Множество X допустимых векторов выпукло и замкнуто.*

Доказательство. Покажем, что полупространство X_i, определяемое одним неравенством $\langle a_i, x\rangle \leqslant b_i$, выпукло. В самом деле, пусть $x, x' \in X_i$. В таком случае $\langle a_i, x\rangle \leqslant b_i$, $\langle a_i, x'\rangle \leqslant b_i$. Пусть α — произвольное число, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Тогда

$$\alpha\langle a_i, x\rangle \leqslant \alpha b_i, \quad (1-\alpha)\langle a_i, x'\rangle \leqslant (1-\alpha)b_i.$$

Складывая эти неравенства и пользуясь линейностью скалярного произведения, получаем $\langle a_i, \alpha x + (1-\alpha)x'\rangle \leqslant \leqslant \alpha b_i + (1-\alpha)b_i = b_i$. Отсюда вытекает выпуклость множества X_i. Нетрудно видеть, что множество X является пересечением полупространств X_i, т. е. $x \in X$ тогда и только тогда, когда x принадлежит всем X_i, $i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, m$. Теперь остается применить теорему 2.1 о том, что пересечение выпуклых множеств выпукло.

Можно было бы доказывать эту теорему, используя матричную запись (2.5) для задания множества X. Поскольку в дальнейшем нам придется часто сталкиваться с матрицами, приведем выкладки в матричном виде. Если $x, x' \in X$, то $Ax \leqslant b$, $Ax' \leqslant b$. Тогда $\alpha Ax \leqslant \alpha b$, $(1-\alpha)Ax' \leqslant \leqslant (1-\alpha)b$. (Здесь мы пользуемся неотрицательностью чисел α и $1-\alpha$.) Отсюда $\alpha Ax + (1-\alpha)Ax' \leqslant b$. В силу линейности операции умножения матрицы на вектор получаем $A(\alpha x + (1-\alpha)x') \leqslant b$, т. е. $\alpha x + (1-\alpha)x' \in X$.

Докажем, что множество X замкнуто. Пусть $x(k)$, $k = 1, 2, \ldots, x(k) \in X$ — произвольная сходящаяся последовательность, $\lim\limits_{k\to\infty} x(k) = \bar{x}$. Перейдем к пределу в неравенстве $Ax(k) \leqslant b$ при $k \to \infty$. В силу непрерывности функции Ax получаем $A\bar{x} \leqslant b$. Теорема доказана.

Особый интерес представляют крайние точки множества X. Может оказаться, что X не имеет ни одной крайней точки — мы уже видели подобные примеры в предыдущем параграфе. Выведем условия, гарантирующие наличие крайних точек.

Определение 2.16. Назовем точку $x_0 \in X$ *внутренней*, если для нее все неравенства (2.3) (а значит, и

(2.4), (2.5)) выполняются строго: $\langle a_i, x_0\rangle < b_i$, $i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, m$. Все точки множества X, не являющиеся внутренними, назовем *граничными*.

Это определение вполне согласуется с обычным понятием внутренней точки множества. В самом деле, используя непрерывность функций $\langle a_i, x\rangle$ и то, что в данном случае таких функций конечное число ($i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, m$), нетрудно указать такое число ε, что если длина вектора $\Delta = (\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n)$ меньше ε, $\|\Delta\| < \varepsilon$, то выполняются неравенства $\langle a_i, x_0 + \Delta\rangle \leqslant b_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, т. е. точка $x_0 + \Delta$ также принадлежит X. Другими словами, всякая внутренняя точка x_0 множества X принадлежит ему вместе с некоторой своей ε-окрестностью.

Очевидно, что внутренняя точка x_0 множества X не может быть крайней: ее можно представить в виде $x_0 = 1/2(x_0 + \Delta) + 1/2(x_0 - \Delta)$, где $x_0 + \Delta$, $x_0 - \Delta \in X$, что противоречит определению 2.10 крайней точки. В связи с этим ясно, что крайние точки следует искать среди граничных, т. е. таких, для которых хотя бы одно из условий (2.3) обращается в равенство.

Определение 2.17. *Носителем граничной точки x_0* назовем множество всех ограничений в (2.3), которым эта точка удовлетворяет в форме равенства. Иначе говоря, носителем точки x_0 является множество всех гиперплоскостей $\langle a_i, x\rangle = b_i$, которыми задается множество X и которые содержат точку x_0.

Например, на рис. 2.1 носителем точки A является пара прямых $3x_1 + 5x_2 = 15$, $10x_1 + 7x_2 = 35$, а носителем точки с координатами (2, 0) — прямая $x_2 = 0$. Пусть $\sigma =$ $= (i_1, i_2, \ldots, i_k)$, $1 \leqslant i_j \leqslant m$, $j = 1, 2, \ldots, k$,— номера тех векторов a_i, которые определяют носитель точки x_0, $\bar{\sigma}$ — множество остальных номеров $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, не попавших в множество σ.

Обозначим через A_σ матрицу, строками которой являются векторы a_i, $i \in \sigma$; через b_σ — вектор, составленный из координат вектора b с номерами из множества σ. Аналогично введем обозначения $A_{\bar{\sigma}}$ и $b_{\bar{\sigma}}$. Например, если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 1 \\ 10 & 7 \\ -1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 15 \\ 2 \\ 35 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \left(\frac{70}{29}, \frac{45}{29}\right),$$

как в примере, изображенном на рис. 2.1, то $\sigma=(1,3)$, $\bar{\sigma}=(2,4,5,6)$, $A_\sigma=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 10 & 7\end{pmatrix}$, $b_\sigma=\begin{pmatrix}15\\ 35\end{pmatrix}$,

$$A_{\bar{\sigma}}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & -1\\ -1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\quad b_{\bar{\sigma}}=\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Тогда ограничения (2.3) (или (2.5)) для точки x_0 принимают вид $A_\sigma x_0=b_\sigma$, $A_{\bar{\sigma}}x_0<b_{\bar{\sigma}}$.

Напомним, что *рангом* матрицы называется максимальное число ее линейно независимых строк (или столбцов).

Теорема 2.18. *Точка $x_0\in X$ является крайней тогда и только тогда, когда ранг матрицы A_σ равен n.*

Доказательство. Как известно из курса линейной алгебры, уравнение $A_\sigma x=0$ имеет только нулевое решение тогда и только тогда, когда ранг матрицы A_σ равен числу переменных n.

Покажем вначале, что если x_0 — крайняя точка, то ранг матрицы A_σ равен n. Допустим, что это не так, тогда ранг меньше n, и уравнение $A_\sigma x=0$ имеет решение $\bar{x}\neq 0$. Поскольку $A_{\bar{\sigma}}x_0<b_{\bar{\sigma}}$, то можно подобрать такое достаточно малое $\alpha\neq 0$, что

$$A_{\bar{\sigma}}(x_0+\alpha\bar{x})<b_{\bar{\sigma}},\quad A_{\bar{\sigma}}(x_0-\alpha\bar{x})<b_{\bar{\sigma}}.$$

При этом

$$A_\sigma(x_0+\alpha\bar{x})=A_\sigma x_0+\alpha A_\sigma\bar{x}=A_\sigma x_0=b_\sigma.$$

Аналогично, $A_\sigma(x_0-\alpha\bar{x})=b_\sigma$. Отсюда вытекает, что точки $x_0+\alpha\bar{x}$, $x_0-\alpha\bar{x}$ принадлежат X. Это, однако, противоречит тому, что x_0 — крайняя точка, поскольку $x_0=\frac{1}{2}(x_0+\alpha\bar{x})+\frac{1}{2}(x_0-\alpha\bar{x})$.

Обратно, пусть ранг матрицы A_σ равен n. Допустим, что x_0 не является крайней точкой множества X. Тогда должны найтись такие две точки $x', x''\in X$, $x'\neq x''$, что $x_0=\frac{1}{2}x'+\frac{1}{2}x''$. В таком случае $b_\sigma=A_\sigma x_0=\frac{1}{2}A_\sigma x'+\frac{1}{2}A_\sigma x''$.

Поскольку $A_\sigma x'\leqslant b_\sigma$, $A_\sigma x''\leqslant b_\sigma$, то из этого равенства вытекает, что $A_\sigma x'=b_\sigma=A_\sigma x''$. Отсюда получаем $A_\sigma(x'-$

$-x'')=0$, что противоречит предположению о ранге матрицы A_σ (так как $x'-x''\neq 0$). Теорема доказана.

Из этой теоремы мы получаем два важных следствия.

Теорема 2.19. *Если в множестве X имеются крайние точки, то их число конечно.*

Доказательство. Из теоремы 2.18 следует, что всякой крайней точке соответствует квадратная невырожденная матрица A_σ, полностью определяющая эту точку: $x_0 = A_\sigma^{-1}b_\sigma$. Следовательно, число крайних точек в множестве X конечно, поскольку у матрицы A существует лишь конечное число подматриц.

Теорема 2.20. *Если множество X ограничено, то оно является выпуклым многогранником.*

Для доказательства достаточно применить определение 2.11 выпуклого многогранника и теорему 2.13 о том, что всякое ограниченное и замкнутое (компактное) множество является выпуклой оболочкой своих крайних точек.

2. Доказательство теоремы 2.18 наводит на мысль о том, что при изучении систем линейных неравенств вида $Ax\leqslant b$ полезно, подобно тому, как это делается при исследовании систем линейных уравнений, рассмотреть однородную систему неравенств $Ax\leqslant 0$.

Обозначим через K множество векторов x, удовлетворяющих системе неравенств $Ax\leqslant 0$: $K=\{x|Ax\leqslant 0\}$. Предоставляем читателю доказать тот простой факт, что K является выпуклым конусом (см. упр. 11).

Весьма важным является следующее утверждение.

Теорема 2.21. *Множество $K=\{x|Ax\leqslant 0\}$ является выпуклым многогранным конусом.*

Доказательство. Рассмотрим в $\mathbf{R}^n$ куб $Q=\{x|-1\leqslant x_i\leqslant 1,\ i=1,\,2,\,\ldots,\,n,\ x=(x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_n)\}$ и пересечение $S=K\cap Q$. Поскольку множество S задается системой конечного числа линейных неравенств: $S=\{x|Ax\leqslant 0,\ x_j\leqslant 1,\ -x_j\leqslant 1,\ j=1,\,2,\,\ldots,\,n\}$ и, очевидно, ограничено, то, как следует из теоремы 2.19, оно является выпуклым многогранником. Пусть $x^1,\,x^2,\,\ldots,\,x^k$ — его крайние точки. Рассмотрим конус $\overline{K}=\left\{x\,|\,x=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i,\right.$

$\left.\alpha_i\geqslant 0,\quad i=1,\,2,\ldots,\,k\right\}$ — коническую оболочку множества точек $x^1,\,x^2,\,\ldots,\,x^k$. Покажем, что $K=\overline{K}$. В самом деле, поскольку все x^i, $i=1,\,2,\,\ldots,\,k$, принадлежат конусу K $(S\subseteq K)$, а $\overline{K}$ — минимальный конус, содержащий эти точки, то $\overline{K} \subseteq K$. С другой стороны, пусть $x \in K$. Тогда найдется такое достаточно малое число $\lambda > 0$, что $\lambda x \in Q$, т. е. $\lambda x \in K \cap Q = S$. Следовательно, вектор λx можно представить в виде выпуклой линейной комбинации крайних точек множества S: $\lambda x = \sum_{i=1}^{k} \beta_i x^i$, $\beta_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$, $\sum_{i=1}^{k} \beta_i = 1$. Но в таком случае $x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x^i$, где $\alpha_i = \beta_i/\lambda \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Отсюда вытекает, что $x \in \overline{K}$, т. е. $K \subseteq \overline{K}$. Следовательно, $K = \overline{K}$.

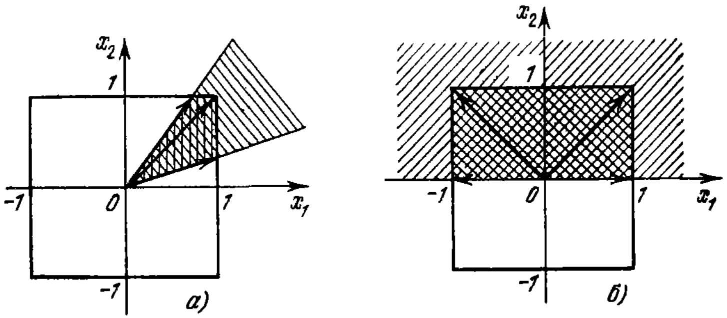

Рис. 2.18.

Иллюстрацией к доказательству этой теоремы служат рис. 2.18, *а* и *б*. На этих рисунках конусы K заштрихованы одинарной, а множества S — двойной штриховкой. Отмечены векторы, на которые затем оказывается натянутым конус K. Некоторые из этих векторов являются лишними, но главное то, что конус K натянут на конечное число векторов.

Как показывает теорема 2.16, особенно просто устроены заостренные конусы. Поэтому важным является результат, дающий необходимое и достаточное условие того, чтобы конус $K = \{x \mid Ax \leqslant 0\}$ был заостренным.

Теорема 2.22. *Конус $K = \{x \mid Ax \leqslant 0\}$ заострен тогда и только тогда, когда ранг матрицы A равен n.*

Доказательство. Пусть ранг A равен n. Предположим, что конус K не является заостренным и пусть $x \neq 0$ таков, что $x \in K$, $-x \in K$. Тогда $Ax \leqslant 0$, $-Ax \leqslant 0$, т. е. $Ax = 0$, что невозможно, поскольку это однородное уравнение имеет единственное решение $x = 0$ (ранг A равен числу переменных). Обратно, если ранг A меньше

n, то уравнение $Ax=0$ имеет ненулевое решение $x \neq 0$, и при этом $A(-x)=0$, т. е. $x \in K$, $-x \in K$ и, следовательно, конус K не является заостренным. Теорема доказана.

Случай, когда ранг матрицы A равен n, часто встречается в практических приложениях. Так, матрица ограничений стандартной задачи линейного программирования (см. гл. I, § 3) имеет ранг n. Действительно, с учетом соглашения, принятого в этой главе, ограничения $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0$ включаются в общую матрицу ограничений. Следовательно, матрица ограничений стандартной задачи линейного программирования содержит подматрицу $-I$ ранга n.

Определение 2.18. Если ранг матрицы A равен n, то множество $X=\{x \mid Ax \leqslant b\}$ назовем *регулярным.*

Теорема 2.23. *Множество X имеет крайние точки тогда и только тогда, когда оно регулярно.*

Доказательство. Пусть множество X не является регулярным, т. е. ранг матрицы A меньше n. В таком случае у матрицы A нет подматриц A_0 ранга n, а следовательно (см. теорему 2.8), нет и крайних точек.

При доказательстве утверждения в обратную сторону используем следующий прием, позволяющий сводить изучение произвольной системы неравенств к исследованию некоторой однородной системы.

Рассмотрим пространство $\mathbf{R}^{n+1}=\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^1$, точки которого будем обозначать (x, t), $x \in \mathbf{R}^n$, $t \in \mathbf{R}^1$. В этом пространстве рассмотрим систему линейных неравенств $Ax-bt \leqslant 0$, $-t \leqslant 0$. Матрица ограничений данной системы есть $\begin{pmatrix} A & -b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\widehat{A}$, и поскольку ранг матрицы A равен n, то ранг матрицы $\widehat{A}$ равен $n+1$. Из теорем 2.21 и 2.22 вытекает, что множество $\widehat{K}$ решений этой системы является выпуклым, многогранным и заостренным конусом. По теореме 2.16, в конусе $\widehat{K}$ имеются крайние векторы. Допустим, что все крайние векторы конуса $\widehat{K}$ имеют вид $(x, 0)$. Поскольку $\widehat{K}$ совпадает с конической оболочкой множества своих крайних векторов, то любой вектор в $\widehat{K}$ имеет вид $(x, 0)$. Это значит, что в конусе $\widehat{K}$ нет векторов вида $(x, 1)$, т. е. система неравенств $Ax \leqslant b$ несовместна. Этот случай нас не интересует, поэтому можно считать, что в конусе $\widehat{K}$ есть крайний вектор вида (x, t), $t>0$. Покажем, что в таком случае точка $\frac{1}{t}x$ — крайняя в множестве X. Ясно, что $\frac{1}{t}x \in X$. Пусть $\frac{1}{t}x=\frac{1}{2}x'+\frac{1}{2}x''$, где $x' \neq x''$, $x' \in X$, $x'' \in X$. Тогда $(x, t) = \frac{1}{2}(tx', t) + \frac{1}{2}(tx'', t)$. Кроме того, $(tx', t) \in \bar{K}$, $(tx'', t) \in \bar{K}$. Например, покажем это для (tx', t). Поскольку $x' \in X$, то $Ax' \leqslant b$. Тогда $A(tx') \leqslant bt$, что и требовалось. Из предположения, что (x, t) — крайний вектор в $\bar{K}$, имеем $(tx', t) = \lambda(x, t)$, $\lambda \geqslant 0$, $(tx'', t) = \mu(x, t)$, $\mu \geqslant 0$. Тогда $\lambda = \mu = 1$, $tx' = x = tx''$, т. е. $x' = x''$, что противоречит предположению $x' \neq x''$.

3. Имеет место аналогия между структурой множества решений систем линейных уравнений и строением множества X допустимых планов задачи линейного программирования (т. е. множеством решений системы (2.3)).

Чтобы пояснить эту аналогию, рассмотрим систему линейных уравнений $Ax = b$ и соответствующую ей однородную систему $Ax = 0$. Пусть $\bar{X}$ — множество решений неоднородной системы, L — множество решений однородной системы, т. е. $\bar{X} = \{x \mid Ax = b\}$, $L = \{x \mid Ax = 0\}$. Отметим, что L — подпространство, т. е. частный случай конуса. Как известно из линейной алгебры, общее решение неоднородной системы получается в виде $x_0 + L$, где x_0 — любой вектор из $\bar{X}$. Другими словами, $\bar{X} = x_0 + L$.

Перейдем к изложению соответствующего факта для систем линейных неравенств вида (2.3).

Обозначим через M выпуклую линейную оболочку множества крайних точек множества X. Как следует из только что доказанной теоремы 2.23, если множество X регулярно, то M не пусто и является выпуклым многогранником.

Т е о р е м а 2.24. *Если ранг матрицы A равен n (множество X регулярно), то $X = M + K$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся конструкцией, приведенной в ходе доказательства теоремы 2.23. Там было установлено, что если (x, t), $t > 0$ — крайний вектор конуса $\bar{K}$, то $\frac{1}{t}x$ — крайняя точка множества X. Покажем, что верно и обратное: если x — крайняя точка в X, то $(x, 1)$ — крайний вектор в $\bar{K}$. В самом деле, допустим, что $(x, 1) = \frac{1}{2}(x', t_1) + \frac{1}{2}(x'', t_2)$, где $(x', t_1) \in \bar{K}$, $(x'', t_2) \in \bar{K}$. Тогда $x = \frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}x''$, $t_1 + t_2 = 2$. Если $t_1, t_2 > 0$, то $\frac{1}{t_1}x' \in X$, $\frac{1}{t_2}x'' \in X$.

Точка x допускает запись $x = \frac{t_1}{2}\left(\frac{1}{t_1}x'\right) + \frac{t_2}{2}\left(\frac{1}{t_2}x''\right)$. Отсюда, поскольку x — крайняя точка, имеем $\frac{1}{t_1}x' = \frac{1}{t_2}x'' = x$, т. е. $(x', t_1) = t_1(x, 1)$, $(x'', t_2) = t_2(x, 1)$. Тем самым доказано, что в этом случае $(x, 1)$ — крайний вектор в $\tilde{K}$.

Пусть одно из t_1, t_2 равно нулю, например, $t_2 = 0$. Тогда $t_1 = 2$, $\frac{1}{2}x' \in X$, $\frac{1}{2}x'' \in X$. Пусть σ — носитель крайней точки x (см. определение 2 17); тогда $b_\sigma = A_\sigma x = \frac{1}{2}A_\sigma x' + \frac{1}{2}A_\sigma x''$. Поскольку $\frac{1}{2}A_\sigma x' \leqslant b_\sigma$, $\frac{1}{2}A_\sigma x'' \leqslant 0$, то отсюда вытекает, в частности, что $A_\sigma x'' = 0$. Ранг матрицы A_σ равен n (теорема 2.18), поэтому $x'' = 0$. Следовательно, $x' = 2x$ и $(x', t_1) = 2(x, 1)$, $(x'', t_2) = 0 \cdot (x, 1)$. И в этом случае также получили, что $(x, 1)$ — крайний вектор в $\tilde{K}$.

Пусть $(x^1, 1), (x^2, 1), \ldots, (x^k, 1), (x^{k+1}, 0), \ldots, (x^s, 0)$ — крайние векторы конуса $\tilde{K}$, принадлежащие разным крайним лучам, причем первые k соответствуют крайним точкам множества X.

Очевидно, что $x^j \in K$ при $j = k+1, \ldots, s$. Перейдем непосредственно к доказательству теоремы. Ясно, что $X \supseteq M + K$. Действительно, если $x^0 \in M$, $z \in K$, то $Ax^0 \leqslant b$ и $Az \leqslant 0$. Покажем, что $X \subseteq M + K$. Пусть $x \in X$. Тогда $(x, 1) \in \tilde{K}$ и

$$(x, 1) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j (x^j, 1) + \sum_{j=k+1}^{s} \beta_j (x^j, 0),$$

где $\alpha_j \geqslant 0$, $\beta_j \geqslant 0$ для всех j. Отсюда имеем

$$x = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j x^j + \sum_{j=k+1}^{s} \beta_j x^j, \quad \sum_{j=1}^{k} \alpha_j = 1.$$

Однако $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j x^j \in M$, поскольку это есть выпуклая линейная комбинация крайних точек x^j, $j = 1, 2, \ldots, k$, $\sum_{j=k+1}^{s} \beta_j x^j \in K$, поскольку $x^j \in K$, $j = k+1, \ldots, s$. Теорема доказана.

В качестве иллюстрации к утверждению теоремы рассмотрим рис. 2.19, 2.20. На рис. 2.19 множество X представляет собой наклонный треугольный цилиндр в $\mathbf{R}^3$, ограниченный снизу плоскостью x_1Ox_2. Многогранник M в данном случае есть треугольник, натянутый на крайние точки A, B, C. Конус K представляет собой луч из начала координат, параллельный образующей цилиндра. Как видно из рисунка, любая точка $x \in X$ представима в виде суммы двух векторов, лежащих соответственно в K и M.

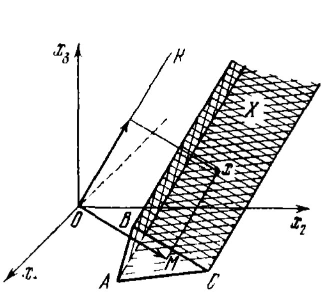

Рис. 2.19.

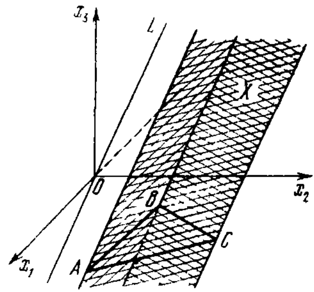

Рис. 2.20.

Иная ситуация на рис. 2.20. Здесь X — цилиндр, не ограниченный в обе стороны. Крайних точек нет, однако достаточно очевидно, что X можно представить в виде суммы треугольника ABC и подпространства L. Оказывается, что картина типична для общего случая множества X, не являющегося регулярным.

Чтобы это показать, воспользуемся обозначением a^j для j-го столбца матрицы A. Нетрудно убедиться, что система неравенств (2.3) может быть записана в виде

$$a^1x_1 + a^2x_2 + \ldots + a^nx_n \leqslant b. \tag{2.6}$$

Если ранг матрицы A равен $r < n$, то среди столбцов a^1, a^2, ..., a^n найдутся r линейно независимых, причем остальные будут выражаться через них в виде линейной комбинации. Будем считать, что линейно независимы первые r столбцов. Тогда $a^s = \sum\limits_{j=1}^{r} \beta_{js} a^j$, $s = r+1, \ldots, n$. Подставив эти выражения в (2.6) и приведя подобные члены, получаем

$$\sum_{j=1}^{n} a^j x_j = \sum_{j=1}^{r} a^j x_j + \sum_{s=r+1}^{n} a^s x_s =$$
$$= \sum_{j=1}^{r} a^j x_j + \sum_{s=r+1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{r} \beta_{js} a^j \right) x_s =$$
$$= \sum_{j=1}^{r} \left(x_j + \sum_{s=r+1}^{n} \beta_{js} x_s \right) a^j.$$

Таким образом, система неравенств (2.6) эквивалентна системе

$$\sum_{j=1}^{r} \left(x_j + \sum_{s=r+1}^{n} \beta_{js} x_s \right) a^j \leqslant b. \qquad (2.7)$$

Введем обозначение

$$l_j(x) = x_j + \sum_{s=r+1}^{n} \beta_{js} x_s, \qquad j = 1, 2, \ldots, r,$$
$$l(x) = (l_1(x),\ l_2(x),\ \ldots,\ l_r(x),\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0), \qquad l(x) \in \mathbf{R}^n.$$

Отметим очевидное свойство преобразования l: $l(l(x)) \equiv \equiv l(x)$.

Рассмотрим в $\mathbf{R}^n$ два линейных подпространства:

$$L = \{x \mid l(x) = 0\}, \quad \mathbf{R}^r = \{x \mid x_{r+1} = x_{r+2} = \ldots = x_n = 0\}$$

и множество $Q = X \cap \mathbf{R}^r$.

Нетрудно видеть, что $x \in Q$ тогда и только тогда, когда 1) $l(x) = x$; 2) $Ax \leqslant b$.

Точки пространства $\mathbf{R}^r$ имеют вид $(x_1, x_2, \ldots, x_r, 0, \ldots \ldots, 0)$, и поэтому систему неравенств $Ax \leqslant b$ в этом пространстве можно записать в виде $\sum_{j=1}^{r} a^j x_j \leqslant b$. Поскольку ранг матрицы этой системы равен r, то по теореме 2.24 множество Q можно представить в виде суммы $Q = M + + K_0$, где M — выпуклый многогранник в пространстве $\mathbf{R}^r$, K_0 — конус в $\mathbf{R}^r$, $K_0 = \{x \mid x \in \mathbf{R}^r,\ Ax \leqslant 0\}$.

Покажем, что $X = Q + L$, Ясно, что $X \supseteq Q + L$. Действительно, если $x = y + z$, где $y \in Q$, $z \in L$, то $Ax = Ay + + Az \leqslant b$, так как $Ay \leqslant b$, $Az \leqslant 0$, т. е. $x \in X$. Обратно, пусть $x \in X$. Положим $y = x - l(x)$. Тогда $l(y) = l(x) - - l(l(x)) = 0$, т. е. $y \in L$. Поскольку $x = l(x) + y$, то $x \in \in Q + L$, так как $l(x) \in Q$.

Таким образом, $X = M + K_0 + L$. Покажем, что $K_0 + L = K = \{x | Ax \leqslant 0\}$. Как следует из (2.7), для всякого $y \in L$ выполняется равенство $Ay = 0$. По определению K_0, для всякого $z \in K_0$ имеем $Az \leqslant 0$. Следовательно, $K_0 + L \subseteq K$. Обратно, пусть $\bar{x} \in K$. Положим $y = x - l(x)$. Тогда, как мы уже видели, $y \in L$. При этом $l(x) \in \mathbf{R}^r$ и $Ax \leqslant 0$, т. е. $l(x) \in K_0$. Поскольку $x = y + l(x)$, то $x \in K_0 + L$. Этими рассуждениями доказана

Теорема 2.25. *Множество X планов задачи линейного программирования допускает представление $X = M + K$, где M — некоторый выпуклый многогранник, $K = \{x | Ax \leqslant 0\}$.*

§ 5. Эквивалентность двух определений выпуклого многогранного множества

Как следует из результатов § 4, множество X решений линейной системы неравенств $Ax \leqslant b$ представимо в виде $X = M + K$, где M — некоторый ограниченный выпуклый многогранник, K — выпуклый многогранный конус. Учитывая определения 2.11 и 2.12, мы можем переформулировать этот факт следующим образом.

Для множества X решений системы линейных неравенств имеет место представление

$$X = \left\{x \mid x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x^i + \sum_{j=1}^{s} \beta_j y^j\right\}, \tag{2.8}$$

где x^i $(i = 1, 2, \ldots, k)$, y^j $(j = 1, 2, \ldots, s)$ — некоторые векторы множества X, $\alpha_i \geqslant 0$, $\beta_j \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$.

Естественно дать следующее.

Определение 2.19. Множество X, представимое в виде (2.8), называется *выпуклым многогранным множеством*.

С учетом этого определения основные результаты § 4 следует рассматривать как доказательство того, что любое множество X, заданное системой линейных неравенств, является выпуклым многогранным множеством.

Оказывается, верно и обратное утверждение: любое выпуклое многогранное множество может быть представлено как множество решений некоторой системы линейных неравенств. С учетом этого факта определение выпуклого многогранного множества можно было бы сформулировать в следующем виде.

Определение 2.20. *Выпуклым многогранным множеством* называется любое множество X, совпадающее с множеством решений некоторой системы линейных неравенств.

Доказательство эквивалентности определений 2.19 и 2.20 завершит изложение теории выпуклых многогранных множеств, составляющее содержание §§ 2—5 этой главы.

Как следует из теоремы 2.17, множество решений системы линейных неравенств выпукло и замкнуто. Следовательно, в первую очередь нужно установить наличие этих свойств у множества X, имеющего вид (2.8). Введем следующие обозначения:

$$M = \left\{ r \mid x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x^i, \quad \alpha_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, k; \quad \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1 \right\},$$

$$K = \left\{ y \mid y = \sum_{j=1}^{s} \beta_j y^j, \quad \beta_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, s \right\}.$$

Тогда $X = M + K$. Как мы знаем, M — выпуклый многогранник, K — выпуклый многогранный конус. По теореме 2.2 множество X выпукло, как сумма двух выпуклых множеств.

Множество X замкнуто в силу следующей леммы.

Лемма 2.4. *Пусть M — компакт, K — замкнутое множество. Тогда их сумма $X = M + K$ замкнута.*

Доказательство. Пусть $v^1, v^2, \ldots, v^m$ — сходящаяся последовательность точек множества X, $\lim_{m\to\infty} v^m = v$. Покажем, что $v \in X$, откуда и будет следовать, что X замкнуто. Для каждого v^m найдутся такие элементы $x^m \in M$, $y^n \in K$, что $v^m = x^m + y^m$, $m = 1, 2, \ldots$. Поскольку M — компакт, то из последовательности $\{x^m\}$ (которая может и не сходиться), можно выбрать сходящуюся последовательность. Чтобы не загромождать изложение введением новых индексов, будем считать (не ограничивая общности), что сама последовательность $\{x^m\}$ сходится. Пусть $\lim_{m\to\infty} x^m = x$. Поскольку множество M замкнуто, то $x \in M$. Так как $y^m = v^m - x^m$, то применяя известные факты из теории пределов, можем утверждать, что последовательность $\{y^m\}$, $m = 1, 2, \ldots$, сходится. Если обозначить ее предел через y, то $y = \lim_{m\to\infty} y^m = \lim_{m\to\infty} v^m - \lim_{m\to\infty} x^m = v - x$, $y \in K$. Отсюда $v = x + y$, т. е. $v \in X$.

Опишем процесс построения системы линейных неравенств, множеством решений которого служит множество X, определяемое по формуле (2.8).

Рассмотрим пространство $\mathbf{R}^{n+1}$, точки которого будем обозначать $w = (u_1, u_2, \ldots, u_n, v)$, или более коротко $w = (u, v)$, где $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, v — число. В пространстве $\mathbf{R}^{n+1}$ рассмотрим систему линейных неравенств

$$\begin{gathered}\langle u, x^1\rangle - v \leqslant 0, \quad \langle u, x^2\rangle - v \leqslant 0, \ldots \langle u, x^k\rangle - v \leqslant 0, \\ \langle u, y^1\rangle \leqslant 0, \quad \langle u, y^2\rangle \leqslant 0, \ldots \langle u, y^s\rangle \leqslant 0,\end{gathered} \tag{2.9}$$

где $x^1, x^2, \ldots, x^k$; $y^1, y^2, \ldots, y^s$ — n-мерные векторы, фигурирующие в представлении множества X в виде (2.8). Обозначим через W подмножество пространства $\mathbf{R}^{n+1}$, совпадающее с множеством решений системы (2.9). По теореме 2.21 множество W — выпуклый многогранный конус. Следовательно, найдутся такие точки $w^1, w^2, \ldots, w^r \in W$, что

$$W = \left\{w \mid w = \sum_{t=1}^{r} \gamma_t w^t, \quad \gamma_t \geqslant 0, \quad t = 1, 2, \ldots, r.\right\} \tag{2.10}$$

Каждая точка w^t имеет вид $w^t = (u^t, v^t)$, $t = 1, 2, \ldots, r$.

Используя числа v^t и векторы u^t, построим систему неравенств в пространстве $\mathbf{R}^n$:

$$\langle u^t, x\rangle \leqslant v^t, \quad t = 1, 2, \ldots, r. \tag{2.11}$$

Обозначим через $\bar{X}$ множество решений этой системы линейных неравенств. Утверждается, что множество $\bar{X}$ совпадает с множеством X, определяемым формулой (2.8).

Покажем вначале, что $X \subseteq \bar{X}$. Пусть $x \in X$ — произвольная точка. Тогда для некоторых $\alpha_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$, $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$ и $\beta_j \geqslant 0$, $j = 1, 2, \ldots, s$, имеем

$$x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x^i + \sum_{j=1}^{s} \beta_j y^j.$$

Подставляя выражение для x в (2.11), получаем

$$\langle u^t, x\rangle = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \langle u^t, x^i\rangle + \sum_{j=1}^{s} \beta_j \langle u^t, y^j\rangle \leqslant v^t \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = v^t.$$

Здесь мы воспользовались тем, что точка $w^t = (u^t, v^t)$ является решением системы (2.9), т. е. $\langle u^t, x^i\rangle \leqslant v^t$, $i = 1, 2, \ldots, k$, и $\langle u^t, y^j\rangle \leqslant 0$, $j = 1, 2, \ldots, s$. Тем самым включение $X \subseteq \overline{X}$ доказано

Допустим, что $\overline{X} \not\subseteq X$. Тогда найдется точка $x_0 \in \overline{X}$, $x_0 \notin X$. Применим к этой точке и к выпуклому замкнутому множеству X теорему о разделяющей гиперплоскости (см. § 2). Найдутся такие n-мерный вектор p и число c, что $\langle p, x\rangle \leqslant c$ для всех $x \in X$ и $\langle p, x_0\rangle > c$.

Покажем, что точка $(p, c) \in \mathbf{R}^{n+1}$ удовлетворяет ограничениям системы (2.9). В самом деле, поскольку $x^i \in X$, то $\langle p, x^i\rangle \leqslant c$, $i = 1, 2, \ldots, k$, а это значит, что точка (p, c) удовлетворяет первым k ограничениям системы (2.9). Чтобы убедиться в том, что точка (p, c) удовлетворяет остальным s ограничениям, рассмотрим множество точек $x_\beta = x + \beta y^j$, где индекс j фиксирован, $1 \leqslant j \leqslant s$, β — любое неотрицательное число, $x \in X$ — любая (фиксированная) точка множества X. Очевидно, $x_\beta \in X$ при любом $\beta \geqslant 0$. Тогда $\langle x_\beta, p\rangle = \langle x, p\rangle + \beta\langle y^j, p\rangle \leqslant c$. Последнее неравенство, однако, возможно лишь в том случае, если $\langle y^j, p\rangle \leqslant 0$. Следовательно, $(p, c) \in W$. Поэтому при некоторых $\gamma_t \geqslant 0$, $t = 1, 2, \ldots, r$, имеет место представление

$$(p, c) = \sum_{t=1}^{r} \gamma_t w^t = \sum_{t=1}^{r} \gamma_t (u^t, v^t),$$

т. е. $p = \sum_{t=1}^{r} \gamma_t u^t$, $c = \sum_{t=1}^{r} \gamma_t v^t$. А поскольку $x_0 \in \overline{X}$, т. е. x_0 удовлетворяет условиям (2.11), то

$$\langle p, x_0\rangle = \sum_{t=1}^{r} \gamma_t \langle u^t, x_0\rangle \leqslant \sum_{t=1}^{r} \gamma_t v^t = c.$$

Полученное неравенство противоречит соотношению $\langle p, x_0\rangle > c$. Таким образом, имеет место включение $\overline{X} \subseteq X$, а значит, выполняется равенство $\overline{X} = X$.

Окончательный вывод из этих рассуждений сформулируем в виде теоремы.

Теорема 2.26. *Определения 2.19 и 2.20 выпуклого многогранного множества эквивалентны.*

§ 6. Линейные неравенства

1. В §§ 4—5 изучалась структура множества решений системы линейных неравенств вида (2.3). В этом разделе мы остановимся на проблемах следующего типа:

В каком случае одно из неравенств системы (2.3) является следствием других?

Например, пусть неравенство с номером m в (2.4) является неотрицательной линейной комбинацией остальных, т. е. существуют такие неотрицательные числа β_1, $\beta_2, \ldots, \beta_{m-1}$, что

$$a_m = \sum_{i=1}^{m-1} \beta_i a_i, \quad b_m \geqslant \sum_{i=1}^{m-1} \beta_i b_i.$$

Тогда ясно, что m-е неравенство — «лишнее» в системе (2.4). В самом деле, если точка x удовлетворяет только первым $m-1$ неравенствам, то она автоматически удовлетворяет и неравенству с номером m:

$$\langle a_m, x\rangle = \sum_{i=1}^{m-1} \beta_i \langle a_i, x\rangle \leqslant \sum_{i=1}^{m-1} \beta_i b_i \leqslant b_m.$$

Определение 2.21. Будем говорить, что неравенство

$$\langle c, x\rangle \leqslant d \tag{2.12}$$

является следствием системы неравенств $\langle a_i, x\rangle \leqslant b_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, если для любого x, удовлетворяющего всем неравенствам этой системы, выполняется неравенство (2.12). Для сокращения записи будем выражать это символически так:

$$Ax \leqslant b \Rightarrow \langle c, x\rangle \leqslant d.$$

Определение 2.22. Будем говорить, что неравенство (2.12) является *неотрицательной линейной комбинацией* неравенств системы (2.4), если существуют такие неотрицательные числа $p_1, p_2, \ldots, p_m$, что

$$c = \sum_{i=1}^{m} p_i a_i, \tag{2,13}$$

$$d \geqslant \sum_{i=1}^{m} p_i b_i. \tag{2.14}$$

Эти формулы могут быть записаны более компактно с использованием обозначения A' для транспонированной матрицы и обозначения $p=(p_1, p_2, \ldots, p_m)$:

$$c = A'p, \tag{2.15}$$

$$d \geqslant \langle b, p\rangle. \tag{2.16}$$

Легко видеть, что если неравенство $\langle c, x\rangle \leqslant d$ является неотрицательной линейной комбинацией неравенств системы (2.4), то $Ax \leqslant b \Rightarrow \langle c, x\rangle \leqslant d$.

Оказывается, имеет место и обратное утверждение: если неравенство $\langle c, x\rangle \leqslant d$ есть следствие системы $Ax \leqslant b$, то оно является неотрицательной линейной комбинацией неравенств $\langle a_i, x\rangle \leqslant b_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, образующих данную систему.

Сформулируем этот факт в виде теоремы.

Теорема 2.27. *Для того чтобы неравенство $\langle c, x\rangle \leqslant d$ являлось следствием системы $Ax \leqslant b$, необходимо и достаточно, чтобы существовало неотрицательное решение p системы* (2.15), (2.16).

Как отмечено выше, в доказательстве нуждается утверждение теоремы 2.27 лишь в одну сторону — о существовании неотрицательного решения системы $A'p = c$, $\langle b, p\rangle \leqslant d$. Этот замечательный факт является прямым следствием теоремы двойственности, которая будет доказана в следующей главе и, по сути дела, ей эквивалентен. Здесь же мы получим некоторые подготовительные результаты, представляющие самостоятельный интерес как средство исследования систем линейных неравенств.

2. Лемма 2.5. *Если $Ax \leqslant b \Rightarrow \langle c, x\rangle \leqslant d$, то $Ax \leqslant 0 \Rightarrow \langle c, x\rangle \leqslant 0$.*

Доказательство. Допустим противное, т. е. что существует такой вектор $\bar{x}$, для которого $A\bar{x} \leqslant 0$, но $\langle c, \bar{x}\rangle > 0$. Пусть x — любой такой вектор, что $Ax \leqslant b$. (Такой вектор обязательно существует, иначе условие леммы $Ax \leqslant b \Rightarrow \langle c, x\rangle \leqslant d$ не имеет смысла). Тогда при любом $\lambda \geqslant 0$ вектор $x_\lambda = x + \lambda\bar{x}$ удовлетворяет неравенству $Ax_\lambda \leqslant b$. Следовательно, при любом $\lambda \geqslant 0$ должно выполняться неравенство $\langle c, x_\lambda\rangle = \langle c, x\rangle + \lambda\langle c, \bar{x}\rangle \leqslant d$, что невозможно, поскольку $\langle c, \bar{x}\rangle > 0$ и величина $\lambda\langle c, \bar{x}\rangle$ может быть сделана сколь угодно большой за счет выбора λ.

Доказанная лемма позволяет на первых порах ограничиться изучением зависимости $Ax \leqslant 0 \Rightarrow \langle c, x\rangle \leqslant 0$. Другими словами, изучение свойств произвольного многогранного множества в некотором смысле сводится к изучению многогранных конусов. С этим явлением мы уже сталкивались в §§ 4, 5.

Отметим, что в этом случае теорема 2.27 превращается в утверждение о существовании неотрицательного решения системы (2.15), поскольку неравенство (2.16) будет выполнено автоматически. Этот частный случай описывает

Лемма 2.6 (Фаркаша). *Для того чтобы* $Ax \leqslant 0 \Rightarrow \langle c, x\rangle \leqslant 0$, *необходимо и достаточно, чтобы система уравнений* (2.15) $A'p = c$ *имела неотрицательное решение.*

Доказательство. Пусть $A'p = c$, $p \geqslant 0$. Тогда

$$\langle c, x\rangle = \langle A'p, x\rangle = \sum_{i=1}^{m} p_i \langle a_i, x\rangle \leqslant 0,$$

если $Ax \leqslant 0$.

Обратно, допустим, что $Ax \leqslant 0 \Rightarrow \langle c, x\rangle \leqslant 0$, но уравнение (2.15) не имеет неотрицательного решения. Рассмотрим выпуклый многогранный конус $K = \mathrm{Co}(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ — коническую оболочку вектор-строк матрицы A. Отсутствие неотрицательного решения уравнения (2.12) означает, что вектор c не принадлежит конусу K. (Напомним, что, по определению 2.12 конической оболочки, конус K содержит все неотрицательные линейные комбинации векторов a_i, $i = 1, 2, \ldots, m$). Как известно (теорема 2.15), конус K замкнут.

Применим к точке $c \notin K$ и замкнутому конусу K теорему о разделяющей гиперплоскости с учетом замечания о том, что существует опорная разделяющая гиперплоскость (см. § 2). Тогда существует такой вектор x_0, что $\langle x_0, a\rangle \leqslant 0$ при $a \in K$ и $\langle x_0, c\rangle > 0$. Здесь мы воспользовались теоремой 2.6 из § 2 о том, что гиперплоскость, опорная к конусу, проходит через 0. Поскольку $a_i \in K$, то $\langle x_0, a_i\rangle \leqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, т. е. $Ax_0 \leqslant 0$. В таком случае должно быть $\langle x_0, c\rangle \leqslant 0$, что, однако, не так. Полученное противоречие доказывает лемму Фаркаша.

Лемме Фаркаша можно придать другую формулировку в виде альтернативы для систем линейных уравнений.

Теорема 2.28. *Имеет место следующая альтернатива: либо уравнение* $A'p = c$ *имеет неотрицательное решение, либо имеет решение система неравенств* $Ax \leqslant 0$, $\langle c, x\rangle > 0$.

Результаты, подобные теореме 2.28, важны в теории линейного программирования и составляют аппарат исследования систем линейных неравенств. Приведем еще два факта такого рода.

Теорема 2.29. *Имеет место следующая альтернатива: либо неравенство* $A'p \geqslant c$ *имеет неотрицательное решение, либо имеет неотрицательное решение система неравенств* $Ax \leqslant 0$, $\langle c, x\rangle > 0$.

Доказательство. Легко убедиться, что обе системы неравенств $A'p \geqslant c$ и $Ax \leqslant 0$, $\langle c, x\rangle > 0$, не могут одновременно иметь неотрицательные решения. В самом деле, допустим, что $p \geqslant 0$, $x \geqslant 0$ — такие решения. Тогда $\langle A'p, x\rangle \geqslant \langle c, x\rangle$. По свойству скалярного произведения $\langle A'p, x\rangle = \langle p, Ax\rangle \leqslant 0$, так как $Ax \leqslant 0$, $p \geqslant 0$. Получаем противоречивое неравенство $0 \geqslant \langle c, x\rangle > 0$.

С другой стороны, предположим, что неравенство $A'p \geqslant c$ не имеет неотрицательного решения. Это значит, что уравнение $A'p - q = c$ не имеет неотрицательного решения (p, q). Тогда по теореме 2.28 имеет решение система $\begin{pmatrix} A \\ -I \end{pmatrix} x \leqslant 0$, $\langle c, x\rangle > 0$. Но первое из неравенств дает $Ax \leqslant 0$, $-x \leqslant 0$, т. е. $x \geqslant 0$.

Теорема 2.30. *Имеет место следующая альтернатива: либо уравнение* $A'p = 0$ *имеет положительное решение* $p > 0$, *либо существует такой вектор* x, *что* $Ax \geqslant 0$, $Ax \neq 0$.

Доказательство. Предоставляем читателю доказать, что обе возможности одновременно осуществиться не могут.

Допустим теперь, что система неравенств $Ax \geqslant 0$ имеет только такое решение x, что $Ax = 0$. Рассмотрим конус $K = \{p \mid A'p = 0\}$ в пространстве $\mathbf{R}^m$ и двойственный ему конус $K^* = \{y \mid \langle y, p\rangle \leqslant 0$ для всех $p \in K\}$. Покажем, что $K^* \cap \mathbf{R}^m_+ = 0$. Пусть $y \in K^*$. Тогда $A'p \leqslant 0$, $-A'p \leqslant 0 \Rightarrow \langle y, p\rangle \leqslant 0$. Применим лемму Фаркаша: существуют такие неотрицательные векторы u, $v \in \mathbf{R}^n_+$ что $y = Au - Av = A(u - v)$. Если $y \geqslant 0$, то $Ax \geqslant 0$, где $x = u - v$, откуда, по предположению, $Ax = 0$, т. е. $y = 0$. Поскольку конус K^*, очевидно, выпуклый и замкнутый, то теперь к нему можно применить теорему 2.8 из § 2: двойственный ему конус $K = (K^*)^*$ содержит положительный вектор.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Привести пример множества X, которое вместе с любыми своими точками x^1, x^2 содержит точку $x = {}^1/_2 x^1 + {}^1/_2 x^2$ и в то же время не является выпуклым.

2. Доказать, что если множество X замкнуто и вместе с любыми своими точками x^1, x^2 содержит точку $x = {}^1/_2 x^1 + {}^1/_2 x^2$, то оно выпукло.

3. Доказать, что надграфик положительной ветви гиперболы, т. е. множество $X = \{(x, y) \mid x > 0,\ y \geqslant 1/x\}$, является выпуклым.

4. Построить гиперплоскость, разделяющую множество X предыдущей задачи и точку $(5, 0)$.

5. Доказать, что если множество X таково, что его можно отделить гиперплоскостью от любой точки $x^0 \notin X$, то X выпукло.

6. Пусть X — выпуклый компакт (т. е. ограничено и замкнуто), $a \notin X$ и точка $b \in X$ — самая удаленная от a среди точек множества X. Доказать, что b — крайняя точка в X.

Указание. Предположить противное и воспользоваться тем, что в неравенстве треугольника $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ равенство достигается только тогда, когда векторы x и y коллинеарны.

7. Доказать, что опорная гиперплоскость к выпуклому компакту содержит некоторые его крайние точки.

8. Говорят, что множества X_1 и X_2 *строго разделяются* гиперплоскостью $\langle p,\ x\rangle = c$, если $\langle p,\ x_1\rangle \leqslant c$ для всех $x_1 \in X_1$ и $\langle p,\ x^2\rangle > c$ для всех $x^2 \in X_2$. Привести пример двух выпуклых замкнутых множеств, которые нельзя строго разделить никакой гиперплоскостью.

9. Доказать, что если в некоторой граничной точке x^0 выпуклого множества X существуют две различные опорные гиперплоскости, то их существует бесконечно много.

10. Пусть вектор $x \in \mathbf{R}^n$ является выпуклой линейной комбинацией векторов $x,^1\ x^2,\ \ldots,\ x^k \in \mathbf{R}^n$. Доказать, что x может быть представлен как выпуклая линейная комбинация не более чем $n + 1$ векторов из множества $\{x^1,\ x^2,\ \ldots,\ x^k\}$.

Указание. Рассмотреть векторы вида $\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ x^i \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{n+1}$, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k$, и воспользоваться леммой 2.1.

11. Доказать, что множество $K = \{x \mid Ax \leqslant 0\}$ является выпуклым конусом.

12. Доказать, что конус K^*, двойственный выпуклому конусу K, является выпуклым.

13. Пусть $K = \mathbf{R}^n$. Найти K^*.

14. Пусть K — многогранный конус,

$$K = \mathrm{Co}\,\{x^1,\ x^2,\ \ldots,\ x^k\},\ K^+ = \{p \mid \langle x^i,\ p\rangle \leqslant 0,\quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k\}.$$

Доказать, что $K^+ = K^*$.

15. Пусть K — многогранный выпуклый конус. Доказать, что K^* — также многогранный конус.

Указание. Воспользоваться упр. 14 и теоремой 2.21.

16. (Теорема Минковского.) Пусть K — многогранный конус. Согласно упр. 15, K^* — также многогранный конус, т. е. существуют такие $p^1,\ p^2,\ \ldots,\ p^m$, что $K^* = \mathrm{Co}\,\{p^1,\ p^2,\ \ldots,\ p^m\}$. Доказать, что $K = \{x \mid \langle x,\ p^j\rangle \leqslant 0,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m\}$.

17. Доказать, что коническая оболочка $\mathrm{Co}\,(M)$ является наименьшим выпуклым конусом, содержащим множество M.

§ 1. Двойственная задача линейного программирования

Рассмотрим задачу линейного программирования

$$\begin{gathered}\max\,(c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n)\\ a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n\leqslant b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n\leqslant b_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n\leqslant b_m,\end{gathered}\tag{3.1}$$

или, в матричной записи,

$$\begin{gathered}\max\,\langle c,\ x\rangle\\ Ax\leqslant b.\end{gathered}\tag{3.2}$$

Задачей, *двойственной* к (3.1) (*двойственной задачей*), называется задача линейного программирования от m переменных $p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_m$ вида

$$\begin{gathered}\min\,(b_1p_1+b_2p_2+\ldots+b_mp_m)\\ a_{11}p_1+a_{21}p_2+\ldots+a_{m1}p_m=c_1,\\ a_{12}p_1+a_{22}p_2+\ldots+a_{m2}p_m=c_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{1n}p_1+a_{2n}p_2+\ldots+a_{mn}p_m=c_n,\\ p_1\geqslant 0,\quad p_2\geqslant 0,\ \ldots,\ p_m\geqslant 0,\end{gathered}\tag{3.3}$$

или, в матричной записи,

$$\begin{gathered}\min\,\langle b,\ p\rangle\\ A'p=c,\quad p\geqslant 0,\end{gathered}\tag{3.4}$$

где $p=(p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_m)$.

Правила построения задачи (3.3) по форме записи задачи (3.1) таковы: в задаче (3.3) переменных p_i столько же, сколько строк в матрице A задачи (3.1). Матрица ограничений в (3.3) — транспонированная матрица A. Вектором правой части ограничений в (3.3) служит вектор коэффициентов максимизируемой линейной формы в (3.1), при этом знаки неравенств меняются на равенство. Наоборот, в качестве целевой функции в (3.3) выступает линейная форма, коэффициенты которой задаются вектором правой части ограничений задачи (3.1), при этом символ max меняется на min. На двойственные переменные p_i накладывается условие неотрицательности. Содержанием теории двойственности применительно к стандартной задаче линейного программирования (3.1) является изучение связей между задачами (3.1) и (3.2). Задачу (3.1), в отличие от двойственной задачи (3.3), будем называть *прямой*.

Будем говорить, что двойственная переменная p_i соответствует i-му ограничению прямой задачи, $i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, m$; наоборот, переменная x_j соответствует j-му ограничению двойственной задачи, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Обратимся к трем основным типам задач линейного программирования, описанным в § 3 гл. I, и выясним, как отражается их специфика на двойственной задаче.

Двойственная к стандартной задаче линейного программирования

$$\begin{gathered} \max \langle c, x\rangle \\ Ax \leqslant b, \quad x \geqslant 0. \end{gathered} \tag{3.5}$$

Обозначим $\bar{A} = \begin{pmatrix} A \\ -I \end{pmatrix}$, где I — единичная $n \times n$-матрица, $\bar{b} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$, где 0 — n-мерный нулевой вектор. Тогда стандартная задача линейного программирования может быть записана в виде

$$\begin{gathered} \max \langle c, x\rangle \\ \bar{A}x \leqslant \bar{b}, \end{gathered} \tag{3.6}$$

который совпадает с видом (3.1).

В таком случае задача, двойственная к (3.6), имеет $m + n$ переменных, которые мы обозначим $v = (p_1, p_2, \ldots$ $\ldots, p_m, q_1, q_2, \ldots, q_n)$, или $v = (p, q)$, где $p = (p_1, p_2, \ldots$ $\ldots, p_m)$, $q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$.

Двойственная к (3.6) задача, согласно описанному алгоритму, получает следующий вид:

$$\min \langle \bar{b}, v \rangle$$
$$\bar{A}'v = c, \quad v \geqslant 0. \tag{3.7}$$

Поскольку $\bar{A}' = (A', -I)$, то, возвращаясь к старым обозначениям, вместо (3.7) получаем

$$\min \langle b, p \rangle$$
$$A'p - q = c, \quad p \geqslant 0, \quad q \geqslant 0. \tag{3.8}$$

Равенство $A'p - q = c$ при условии $q \geqslant 0$ возможно тогда и только тогда, когда $A'p \geqslant c$. Поэтому запись (3.8) эквивалентна следующей:

$$\min \langle b, p \rangle$$
$$A'p \geqslant c, \ p \geqslant 0. \tag{3.9}$$

Действительно, если (p^*, q^*) — решение задачи (3.8), то, очевидно, p^* — решение задачи (3.9). Обратно, если p^* — решение (3.9), то пара (p^*, q^*), где $q^* = A'p^* - c$, составляет решение для (3.8).

Поэтому *двойственной к стандартной задаче* линейного программирования (3.5) называется задача (3.9).

Двойственная к канонической задаче линейного программирования

$$\max \langle c, x \rangle$$
$$Ax = b, \quad x \geqslant 0. \tag{3.10}$$

Заменим каждое равенство $\langle a_i, x \rangle = b_i$ на два неравенства $\langle a_i, x \rangle \leqslant b_i$, $\langle -a_i, x \rangle \leqslant -b_i$. Ясно, что задача (3.10) эквивалентна следующей:

$$\max \langle c, x \rangle$$
$$Ax \leqslant b, \quad -Ax \leqslant -b, \quad x \geqslant 0. \tag{3.11}$$

Обозначив $\tilde{A} = \begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix}$, $\tilde{b} = \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix}$, получаем в других обозначениях новую запись задачи (3.11):

$$\max \langle c, x \rangle$$
$$\tilde{A}x \leqslant \tilde{b}, \quad x \geqslant 0. \tag{3.12}$$

Ясно, что (3.12) представляет собой стандартную задачу линейного программирования. Воспользовавшись формулой (3.9), получаем, что задачу, двойственную к (3.12), можно записать в виде

$$\begin{gathered} \min \langle \tilde{b}, v \rangle \\ \tilde{A}' v \geqslant c, \quad v \geqslant 0, \end{gathered} \tag{3.13}$$

где $v = (r_1, r_2, \ldots, r_m, s_1, s_2, \ldots, s_m)$ — вектор $2m$-мерного пространства.

Возвращаясь к прежним обозначениям, имеем

$$\begin{gathered} \min (\langle b, r \rangle - \langle b, s \rangle) \\ A' r - A' s \geqslant c, \quad r \geqslant 0, \quad s \geqslant 0, \end{gathered} \tag{3.14}$$

где $r = (r_1, r_2, \ldots, r_m)$, $s = (s_1, s_2, \ldots, s_m)$. Обозначим $p = r - s$. Очевидно, что задача (3.14) эквивалентна такой:

$$\begin{gathered} \min \langle b, p \rangle \\ A' p \geqslant c, \end{gathered} \tag{3.15}$$

где на вектор p уже не накладывается никаких дополнительных условий (типа неотрицательности), поскольку то, что p есть разность двух неотрицательных векторов r и s, никакой информации не несет.

Задача (3.15) *называется двойственной к канонической задаче* (3.10).

Нетрудно проверить и обратное: задача, двойственная к (3.9), совпадает с (3.5), а двойственная к (3.15) совпадает с (3.10). Поэтому прямую и двойственную задачи линейного программирования называют также *взаимодвойственными*.

Из предыдущих построений, а также факта взаимодвойственности задач (3.5), (3.9) и (3.10), (3.15) вытекает следующее наблюдение, которое нетрудно обосновать формальными выкладками: на i-ю переменную задачи линейного программирования условие неотрицательности накладывается тогда и только тогда, когда i-е ограничение двойственной задачи носит характер неравенства (а не уравнения).

Ограничась этим и не делая больше формальных преобразований, выпишем двойственную задачу к общей задаче линейного программирования (см. § 3 гл. 1):

$$\min \sum_{i=1}^{k} b_i p_i + \sum_{i=k+1}^{m} b_i p_i$$

$$\langle a^j, p\rangle \leqslant c_j, \quad j = 1, 2, \ldots, r, \quad \langle a^j, p\rangle = c_j,$$
$$j = r+1, \ldots, m, \quad (3.16)$$
$$p_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, k,$$

где (напомним) a^j — j-й столбец матрицы A, $p = (p_1, p_2, \ldots$ $\ldots, p_m)$.

В следующих параграфах теория двойственности будет построена для взаимодвойственных задач (3.1), (3.3), причем будет использоваться в основном матричная запись (3.2), (3.4), а затем эта теория будет распространена на остальные типы задач линейного программирования.

§ 2. Теорема двойственности

1. Выясним вначале простейшие связи между прямой (3.2) и двойственной (3.4) задачами.

Напомним терминологию линейного программирования на примере задачи (3.2).

Линейная функция (форма) $\langle c, x\rangle$ называется *целевой функцией* задачи.

Вектор x, удовлетворяющий ограничениям задачи, т. е. $Ax \leqslant b$, называется *допустимым*, или *планом*.

Множество $X = \{x | Ax \leqslant b\}$ всех допустимых векторов называется *допустимым множеством*, или *множеством планов*.

Если допустимое множество X задачи (3.1) не пусто, то задача называется *допустимой*.

Если целевая функция $\langle c, x\rangle$ достигает на множестве X планов максимального значения и оно равно d, то число d называется *значением задачи* (3.1).

Любой допустимый вектор $x^* \in X$, на котором целевая функция принимает максимальное значение ($\langle c, x^*\rangle = d$), называется *решением задачи* (3.1), или *оптимальным планом*.

Отметим очевидный факт: $x^* \in X$ оптимален тогда и только тогда, когда для любого $x \in X$ имеет место неравенство $\langle c, x\rangle \leqslant \langle c, x^*\rangle$.

Нам придется часто проделывать следующие преобразования систем линейных неравенств вида (3.1). Пусть $p = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$ — неотрицательный вектор, $p_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Умножим i-е неравенство в (3.1) на число p_i:

$$p_i(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n) \leqslant p_i b_i. \qquad (3.17)$$

Поскольку $p_i \geqslant 0$, то знак неравенства сохраняется.

Просуммируем полученные неравенства по $i = 1, 2, \ldots, m$:

$$\sum_{i=1}^{m} p_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant \sum_{i=1}^{m} p_i b_i. \qquad (3.18)$$

Поскольку число $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$ представляет собой i-ю координату вектора Ax, то формулу (3.18) можно записать в более компактной форме

$$\langle p, Ax \rangle \leqslant \langle p, b \rangle. \qquad (3.19)$$

Поскольку, очевидно,

$$\langle p, Ax \rangle = \langle A'p, x \rangle, \qquad (3.20)$$

то при $p \geqslant 0$ из неравенства $Ax \leqslant b$ вытекает (3.19), или

$$\langle A'p, x \rangle \leqslant \langle p, b \rangle. \qquad (3.21)$$

В дальнейшем будем пользоваться формулами (3.19), (3.20), не прибегая к выкладкам с суммами.

Переход от неравенства $Ax \leqslant b$ к неравенству (3.19) при $p \geqslant 0$ назовем *скалярным умножением на вектор* p.

Теорема 3.1. *Если множество X планов задачи* (3.1) *не пусто и целевая функция $\langle c, x \rangle$ сверху ограничена на этом множестве, то задача* (3.1) *имеет решение.*

Доказательство. По теореме 2.25 § 4 гл. II, множество X представимо в виде $X = M + K$, где M — некоторый выпуклый многогранник, K — выпуклый многогранный конус, $K = \{y \mid Ay \leqslant 0\}$. Пусть

$$M = \left\{ x \mid x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x^i, \quad \alpha_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, k, \quad \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1 \right\},$$

где $(x^1, x^2, \ldots, x^k)$ — множество всех крайних точек многогранника M. Обозначим $d = \max\limits_{1 \leq i \leq k} \langle c, x^i \rangle$. Пусть x^* — та из крайних точек многогранника M, для которой $d = \langle c, x^* \rangle$. Покажем, что x^* — решение задачи (3.1). Поскольку $x^* \in X$, то требуется лишь показать, что для любой точки $x \in X$ выполняется неравенство $\langle c, x \rangle \leq d$. В самом деле, пусть $x = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i x^i + y$, где $y \in K$. Тогда

$$\langle c, x \rangle = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \langle c, x^i \rangle + \langle c, y \rangle \leq d \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = d.$$

Здесь мы воспользовались неравенством $\langle c, y \rangle \leq 0$ для $y \in K$. Действительно, если $\langle c, y \rangle > 0$, то поскольку при любом $\lambda \geq 0$ вектор $x^* + \lambda y$ принадлежит X, т. е. является допустимым, получаем, что целевая функция $\langle c, x \rangle$ на X может принимать сколь угодно большие значения $\langle c, x^* \rangle + \lambda \langle c, y \rangle$, т. е. неограничена.

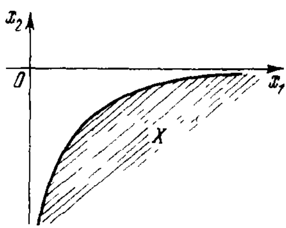

Рис. 3.1.

Если множество M пусто, то $X = K$ и тогда очевидно, что точка $x^* = 0$ является решением (3.1).

Отметим, что теорема 3.1 справедлива лишь для задач линейного программирования. Например, рассмотрим задачу

$$\max x_2$$

$$x_1 x_2 \leq -1, \; x_1 \geq 0.$$

Здесь целевая функция линейна, но одно из ограничений не является линейным.

Допустимое множество X данной задачи представляет собой часть плоскости, ограниченную ветвью гиперболы (см. рис. 3.1).

Множество X выпукло (докажите!) и замкнуто. Целевая функция x_2 ограничена сверху числом 0, однако точная верхняя грань значений целевой функции на множестве X, которая равна нулю, не достигается.

Непосредственно из доказательства теоремы 3.1 получаем следующее следствие.

Т е о р е м а 3.2. *Если множество X допустимых планов имеет крайние точки* (*т. е. ранг матрицы A равен n*)

и задача (3.1) *имеет решение, то среди крайних точек найдется оптимальная.*

Доказательство очевидно, поскольку, если задача (3.1) имеет решение x^* и, кроме того, $\langle c, x^*\rangle = d$, то линейная форма $\langle c, x\rangle$ ограничена на множестве X числом d. Теперь остается обратиться к доказательству теоремы 3.1.

2. Обозначим через P множество планов двойственной задачи (3.4): $P = \{p | A'p = c, p \geqslant 0\}$.

Лемма 3.1. *Пусть* $x \in X$, $p \in P$ — *произвольные допустимые планы прямой* (3.2) *и двойственной* (3.4) *задач соответственно. Тогда*

$$\langle c, x\rangle \leqslant \langle b, p\rangle. \tag{3.22}$$

Доказательство. Поскольку $x \in X$, то $Ax \leqslant b$. Умножим это неравенство скалярно на вектор $p \geqslant 0$. Из (3.19) и (3.21) получаем $\langle c, x\rangle = \langle A'p, x\rangle = \langle p, Ax\rangle \leqslant \leqslant \langle p, b\rangle$.

Лемма 3.2. *Пусть* $x^* \in X$, $p^* \in P$ — *планы задач* (3.2), (3.4) *соответственно. Если* $\langle c, x^*\rangle = \langle b, p^*\rangle$, *то* x^* — *решение задачи* (3.2), p^* — *решение задачи* (3.4).

Доказательство. Пусть $x \in X$ — произвольный план задачи (3.2). Тогда, по лемме 3.1, $\langle c, x\rangle \leqslant \langle b, p^*\rangle = \langle c, x^*\rangle$, т. е. $\langle c, x\rangle \leqslant \langle c, x^*\rangle$. Утверждение для p^* доказывается аналогично.

Лемма 3.2 дает достаточное условие оптимальности планов задач линейного программирования. Позднее мы убедимся в том, что оно является также и необходимым условием оптимальности планов x^* и p^*.

Основу теории двойственности составляют две теоремы. Первая из них называется *теоремой двойственности*, вторая — *теоремой равновесия*. Объяснение последнего названия кроется в экономических интерпретациях двойственной задачи, о которых будет говориться в гл. IV.

Теорема двойственности. *Если взаимодвойственные задачи* (3.2), (3.4) *допустимы, то они обе имеют решение и одинаковые значения.*

Доказательство. Пусть задачи (3.2), (3.4) допустимы и $\bar{p} \in P$ — произвольный план задачи (3.4). Тогда, по лемме 3.1, целевая функция $\langle c, x\rangle$ ограничена на множестве X числом $\langle b, \bar{p}\rangle$. Отсюда и из теоремы 3.1 получаем, что задача (3.2) имеет решение x^*.

Рассмотрим в пространстве $\mathbf{R}^m$ систему линейных уравнений

$$A'p = c \tag{3.23}$$

$$\langle b, p\rangle = \langle c, x^*\rangle, \tag{3.24}$$

Если вектор p^* неотрицателен и является решением системы (3.23), (3.24), то

1) p^* — план задачи (3.4), так как $p^* \geqslant 0$, $A'p^* = c$;

2) p^* — оптимальный план задачи (3.4), так как $\langle b, p^* \rangle = \langle c, x^* \rangle$, а это, согласно лемме 3.2, достаточное условие оптимальности;

3) значения $\langle c, x^* \rangle$ и $\langle b, p^* \rangle$ задач (3.2) и (3.4) совпадают.

Таким образом, для доказательства теоремы двойственности остается показать, что система уравнений (3.23), (3.24) имеет неотрицательное решение.

Запишем данную систему в матричном виде. Пусть $\tilde{A} = \begin{pmatrix} A' \\ b \end{pmatrix}$, $\tilde{c} = \begin{pmatrix} c \\ \langle c, x^* \rangle \end{pmatrix}$. Тогда

$$\tilde{A} p = \tilde{c} \tag{3.25}$$

— запись системы уравнений (3.23), (3.24) в новых обозначениях.

Допустим, что система уравнений (3.25) не имеет неотрицательных решений. В таком случае, по теореме 2.26 из § 6 гл. II, имеет решение система неравенств

$$\tilde{A}'\tilde{x} \leqslant 0, \quad \langle \tilde{c}, \tilde{x} \rangle > 0. \tag{3.26}$$

Здесь $\tilde{x}$ — вектор размерности $n+1$ (в соответствии с тем, что у матрицы $\tilde{A}' = (A, b)$ имеется $n+1$ столбец). Обозначим $\tilde{x} = (x, \gamma)$, где $x \in \mathbf{R}^n$, γ — число. Тогда система неравенств (3.26) может быть записана в виде

$$Ax + \gamma b \leqslant 0, \tag{3.27}$$

$$\langle c, x \rangle + \gamma \langle c, x^* \rangle > 0. \tag{3.28}$$

Покажем, однако, что данная система не может иметь решений (x, γ).

Умножим скалярно неравенство (3.27) на вектор $\bar{p} \geqslant 0$ — план задачи (3.4):

$$\langle \bar{p}, Ax \rangle + \gamma \langle \bar{p}, b \rangle \leqslant 0. \tag{3.29}$$

Воспользовавшись равенствами $\langle \bar{p}, Ax \rangle = \langle A'\bar{p}, x \rangle = \langle c, x \rangle$, из (3.25) получаем $\langle c, x \rangle + \gamma \langle b, \bar{p} \rangle \leqslant 0$, что вместе с (3.28) дает $\gamma(\langle c, x^* \rangle - \langle b, \bar{p} \rangle) > 0$. Поскольку $\langle c, x^* \rangle \leqslant \langle b, \bar{p} \rangle$, то $\gamma < 0$.

Поделив обе части неравенства (3.27) на положительное число $-\gamma$, получаем $A(-x/\gamma) \leqslant b$. Это означает, что вектор $-x/\gamma$ допустим для задачи (3.2). Так как, кроме того, x^* — решение задачи (3.2), то $\langle c, -x/\gamma\rangle \leqslant \langle c, x^*\rangle$, или $\langle c, x\rangle + \gamma\langle c, x^*\rangle \leqslant 0$, что противоречит (3.28).

Таким образом, система (3.27), (3.28) не может иметь решений. Теорема двойственности доказана.

3. Теорема равновесия. *Пусть* $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$, $p^* = (p_1^*, p_2^*, \ldots, p_m^*)$ — *оптимальные планы прямой* (3.1) *и двойственной* (3.3) *задач соответственно. Тогда если* $p_i^* > 0$, *то*

$$a_{i1}x_1^* + a_{i2}x_2^* + \ldots + a_{in}x_n^* = b_i. \tag{3.30}$$

Доказательство. Поскольку $x^* \in X$, то $Ax^* \leqslant b$. Умножив это неравенство скалярно на $p^* \geqslant 0$, получаем $\langle c, x^*\rangle = \langle A'p^*, x^*\rangle = \langle p^*, Ax^*\rangle \leqslant \langle b, p^*\rangle$. Поскольку, по теореме двойственности, $\langle c, x^*\rangle = \langle b, p^*\rangle$, то $\langle p^*, Ax^*\rangle = \langle b, p^*\rangle$. Следовательно, $\langle p^*, -Ax^* + b\rangle = 0$. Вектор $r = -Ax^* + b$ неотрицателен, так как $Ax^* \leqslant b$. Скалярное произведение $\langle p^*, r\rangle = \sum\limits_{i=1}^{m} p_i^* r_i$ может равняться нулю только тогда, когда равенство $p_i^* r_i = 0$ выполняется для всех $i = 1, 2, \ldots, m$. Если $p_i^* > 0$, то

$$0 = r_i = (b - Ax^*)_i = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^*.$$

Отсюда и вытекает утверждение теоремы.

Отметим, что решение задач (3.1) и (3.3) необязательно единственно. В связи с этим обратим внимание на то, что в теореме равновесия речь идет о любой паре решений x^*, p^* этих задач.

Выведем некоторые следствия из теорем двойственности и равновесия.

Теорема 3.3. *Если одна из взаимодвойственных задач имеет решение, то имеет решение и другая.*

Доказательство. Допустим, что задача (3.1) имеет решение x^*. Априори возможны два случая.

1) Задача (3.3) допустима. В таком случае множество P непусто, и целевая функция $\langle b, p\rangle$ ограничена на нем снизу числом $\langle c, x^*\rangle$ (согласно лемме 3.1). По теореме 3.1 задача (3.3) имеет решение.

2) Задача (3.3) недопустима, т. е. система уравнений не имеет неотрицательного решения. В этом случае по теореме 2.28 (см. § 6 гл. II) имеет решение $\bar{x}$ система неравенств $Ax \leqslant 0$, $\langle c, x\rangle > 0$. Рассмотрим вектор $\tilde{x} =$

$=x^*+\bar{x}$. Ясно, что $A\tilde{x} \leqslant b$, т. е. $\tilde{x} \in X$. При этом $\langle c, \tilde{x}\rangle = \langle c, x^*\rangle + \langle c, \bar{x}\rangle > \langle c, x^*\rangle$, что невозможно. Таким образом, второй случай невозможен.

Теорема 3.3 показывает, что имеются следующие возможности:

а) обе задачи (3.1), (3.3) допустимы (а значит, имеют решение);

б) обе задачи (3.1), (3.3) недопустимы;

в) одна задача допустима, другая нет.

Примеры показывают, что все три возможности осуществляются:

$$
\text{а)}\quad \begin{array}{ll}
\max(x_1+x_2) & \min(4p_1+4p_2)\\
2x_1+x_2 \leqslant 4, & 2p_1+p_2=1,\\
x_1+2x_2 \leqslant 4, & p_1+2p_2=1,\\
 & p_1 \geqslant 0,\ p_2 \geqslant 0;\\
x^*=(4/3,\ 4/3), & p^*=(1/3,\ 1/3).
\end{array}
$$

Поскольку значения целевых функций прямой и двойственной задач на векторах x^* и p^* совпадают, то по лемме (3.2) эти векторы являются решениями соответствующих задач.

$$
\text{б)}\quad \begin{array}{ll}
\max(x_1+3x_2) & \min(3p_1-4p_2)\\
x_1-x_2 \leqslant 3, & p_1-p_2=1,\\
-x_1+x_2 \leqslant -4. & -p_1+p_2=3;\\
 & p_1 \geqslant 0,\ p_2 \geqslant 0.
\end{array}
$$

Обе задачи недопустимы.

$$
\text{в)}\quad \begin{array}{ll}
\max x_1 & \min p_1\\
x_1-x_2 \leqslant 1. & p_1=1,\ -p_1=0,\ p_1 \geqslant 0.
\end{array}
$$

Здесь прямая задача допустима, двойственная — недопустима. При этом прямая задача не имеет решения, как и должно быть по теореме 3.3.

Теорема 3.4. *Если одна из взаимодвойственных задач недопустима, а вторая допустима, то целевая функция второй задачи неограничена на допустимом множестве.*

Доказательство. Допустим, что задача (3.3) недопустима, а допустимое множество X задачи (3.1) непусто. Если предположить, что целевая функция $\langle c, x\rangle$ ограничена на множестве X, то из теоремы 3.1 будет следовать, что задача (3.1) имеет решение, что противоречит утверждению теоремы 3.3.

Теорема 3.5. *Пусть* $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$, $\bar{p} = (\bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots, \bar{p}_m)$ — *допустимые планы задач* (3.1) *и* (3.2) *соответственно, причем выполняется условие: если* $\bar{p}_i > 0$, *то*

$$a_{i1}\bar{x}_1 + a_{i2}\bar{x}_2 + \ldots + a_{in}\bar{x}_n = b_i. \tag{3.31}$$

Тогда $\bar{x}$ *и* $\bar{p}$ — *оптимальные планы соответствующих задач.*

Доказательство. Из условия (3.31) вытекает равенство $\langle \bar{p}, A\bar{x} \rangle = \langle \bar{p}, b \rangle$. Поскольку $\langle \bar{p}, A\bar{x} \rangle = \langle A'\bar{p}, \bar{x} \rangle = \langle c, \bar{x} \rangle$, то получаем равенство $\langle c, \bar{x} \rangle = \langle b, \bar{p} \rangle$, после чего остается воспользоваться леммой 3.2.

Теорема 3.5 является обратной к теореме равновесия. Взятые вместе, они дают необходимое и достаточное условие оптимальности допустимых векторов.

4. Теорема двойственности позволяет доказать теорему 2.27, сформулированную в § 6 гл. II.

Доказательство теоремы 2.27. Пусть неравенство $\langle c, x \rangle \leqslant d$ является следствием системы неравенств $Ax \leqslant b$. Это значит, что линейная форма $\langle c, x \rangle$ ограничена на множестве $X = \{x | Ax \leqslant b\}$. Рассмотрим задачу линейного программирования (3.2) с данной матрицей A и векторами b, c. По теореме 3.1 эта задача имеет решение x^*. Пусть значение задачи (3.2) равно $\bar{d}$: $\langle c, x^* \rangle = \bar{d}$. Тогда $\bar{d} \leqslant d$. По теореме двойственности двойственная задача (3.4) также имеет решение p^*, т. е. $A'p^* = c$, $p^* \geqslant 0$, при этом $\langle p^*, b \rangle = \bar{d} \leqslant d$.

Используя приемы, переводящие различные типы задач линейного программирования друг в друга, можно распространить теорию двойственности на все типы задач. Так, нетрудно убедиться, что теорема двойственности справедлива для стандартной, канонической и общей задач линейного программирования.

Для примера сформулируем теорему равновесия для стандартной задачи:

Пусть $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$, $p^* = (p_1^*, p_2^*, \ldots, p_m^*)$ — *оптимальные планы прямой* (3.5) *и двойственной* (3.9) *задач соответственно. Тогда, если* $p_i^* > 0$, *то*

$$a_{i1}x_1^* + a_{i2}x_2^* + \ldots + a_{in}x_n^* = b_i.$$

Если $x_j^* > 0$, *то*

$$a_{1j}p_1^* + a_{2j}p_2^* + \ldots + a_{mj}p_m^* = c_j.$$

§ 3. Короткое доказательство теоремы двойственности

Теорема двойственности представляет собой центральный результат теории линейного программирования. Существуют различные методы ее доказательства — и чисто алгебраические, без использования результатов типа теорем об отделимости, и доказательства, основанные на принципиально новых идеях типа метода штрафных функций. Мы при доказательстве этой теоремы пользовались всеми сведениями о строении выпуклых многогранных множеств, полученными в гл. II. Теория выпуклых многогранных множеств является неотъемлемой частью линейного программирования, поскольку она полностью описывает структуру допустимых множеств задач линейного программирования. Тем не менее в этом параграфе мы дадим доказательство теоремы двойственности, не опирающееся на основные факты о многогранных множествах.

Непосредственное доказательство теоремы двойственности будет использовать следующую независимую цепочку утверждений:

теорема об отделимости — § 2 гл. II,

теорема о замкнутости многогранного выпуклого конуса — § 3 гл. II.

простейшие связи между прямой и двойственной задачами — леммы 3.1, 3.2 § 2 гл. III,

альтернатива для систем линейных неравенств — теорема 2.29 § 6 гл. II.

Доказательство теоремы двойственности для стандартной задачи линейного программирования.

Рассмотрим взаимодвойственные стандартные задачи линейного программирования:

$$\max \langle c, x\rangle \qquad \min \langle b, y\rangle$$
$$Ax \leqslant b, \quad x \geqslant 0; \qquad A'y \geqslant c, \quad y \geqslant 0.$$

Будем считать, что обе эти задачи допустимы.

Рассмотрим систему линейных неравенств от переменных $(x, y) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m)$ в пространстве $\mathbf{R}^{n+m}$:

$$\begin{gathered} Ax \leqslant b, \quad A'y \geqslant c, \\ \langle x, c\rangle \geqslant \langle y, b\rangle, \quad x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0. \end{gathered} \tag{3.32}$$

Лемма 3.3. *Если (x^*, y^*) — решение системы* (3.32), *то векторы x^* и y^* являются решениями прямой и двойственной задач соответственно.*

Доказательство. Действительно, поскольку (x^*, y^*) удовлетворяет системе неравенств (3.32), то x^* и y^* допустимы каждый для своей стандартной задачи линейного программирования. Тогда по лемме 3.1 из § 2 настоящей главы $\langle c, x^*\rangle \leqslant \langle b, y^*\rangle$. Но из (3.32) вытекает, что $\langle c, x^*\rangle \geqslant \langle b, y^*\rangle$. Следовательно, $\langle c, x^*\rangle = \langle b, y^*\rangle$, и по лемме 3.2 из § 2 получаем требуемое утверждение.

Таким образом, для доказательства теоремы двойственности нужно показать, что система неравенств (3.32) имеет решение (x^*, y^*).

Запишем систему (3.32) в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A' \\ -c & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leqslant \begin{pmatrix} b \\ -c \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (x, y) \geqslant 0, \tag{3.33}$$

или

$$\bar{A}z \leqslant \bar{b}, \quad z \geqslant 0, \tag{3.34}$$

где

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A' \\ -c & b \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = (b, -c, 0), \quad z = (x, y).$$

Лемма 3.4. *Если обе взаимодвойственные стандартные задачи линейного программирования допустимы, то система неравенств* (3.32) *имеет решение.*

Доказательство. Допустим, что утверждение леммы неверно и система (3.32), а значит, и системы (3.33), (3.34), решения не имеют. Согласно теореме 2.29 § 6 гл. II в таком случае имеет решение система

$$\begin{gathered} \bar{A}'\bar{v} \geqslant 0, \\ \langle \bar{v}, \bar{b}\rangle < 0, \\ \bar{v} \geqslant 0. \end{gathered} \tag{3.35}$$

Распишем эту систему подробнее:

$$\begin{gathered} \begin{pmatrix} A' & 0 & -c \\ 0 & -A & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v \\ w \\ u \end{pmatrix} \geqslant 0, \\ \langle v, b\rangle - \langle w, c\rangle < 0, \quad v \geqslant 0, \quad w \geqslant 0, \quad u \geqslant 0, \end{gathered} \tag{3.36}$$

где $\bar{v}=(v,\ w,\ u)$. Здесь v — m-мерный вектор, w имеет размерность n, u — число.

Систему неравенств (3.36) можно переписать следующим образом:

$$A'v-uc\geqslant 0,\quad -Aw+ub\geqslant 0,$$
$$\langle v,\ b\rangle-\langle w,\ c\rangle<0,\quad v\geqslant 0,\quad w\geqslant 0,\ u\geqslant 0. \tag{3.37}$$

Покажем, что система (3.37) не может иметь решений.

Пусть x, y — допустимые векторы прямой и двойственной стандартных задач соответственно. Тогда

$$\langle v,\ b\rangle\geqslant\langle v,\ Ax\rangle=\langle A'v,\ x\rangle\geqslant u\langle c,\ x\rangle,$$
$$\langle w,\ c\rangle\leqslant\langle w,\ A'y\rangle=\langle Aw,\ y\rangle\leqslant u\langle b,\ y\rangle,$$

т. е.

$$\langle v,\ b\rangle\geqslant u\langle x,\ c\rangle,\quad \langle w,\ c\rangle\leqslant u\langle y,\ b\rangle.$$

Вычитая второе неравенство из первого, получаем

$$0>\langle v,\ b\rangle-\langle w,\ c\rangle\geqslant u(\langle x,\ c\rangle-\langle y,\ b\rangle),$$

откуда $u>0$.

Рассмотрим векторы $\tilde{v}=v/u$ и $\tilde{w}=w/u$. Из неравенств (3.37) с учетом $u>0$ имеем

$$A'\tilde{v}\geqslant c,\quad \tilde{v}\geqslant 0,$$
$$A\tilde{w}\leqslant b,\quad \tilde{w}\geqslant 0,$$
$$\langle\tilde{w},\ c\rangle<\langle\tilde{v},\ b\rangle.$$

Первая строчка означает, что вектор $\tilde{v}$ допустим для двойственной стандартной задачи. Из второй строчки вытекает, что $\tilde{w}$ допустим для прямой задачи. Но в этом случае последнее неравенство невозможно, так как оно противоречит лемме 3.2.

Из лемм 3.3 и 3.4 непосредственно вытекает справедливость теоремы двойственности.

§ 4. Строение множества решений задачи линейного программирования

Пусть X^0 — непустое множество решений задачи (3.2), d — значение этой задачи. Нетрудно видеть, что X^0 — выпуклое многогранное множество. В самом деле, очевидно, что X^0 определяется системой линейных неравенств $\langle c,\ x\rangle\leqslant d$, $\langle -c,\ x\rangle\leqslant -d$, $Ax\leqslant b$, и поэтому наше утверждение непосредственно вытекает из определения

2.20 выпуклого многогранного множества. Согласно теореме 2.25, множество X^0 допускает представление вида

$$X^0 = M^{X^0} + K^{X^0},$$

где M^{X^0} — некоторый выпуклый многогранник,

$$K^{X^0} = \{x \mid Ax \leqslant 0, \quad \langle c, x\rangle = 0\}.$$

Нас интересует вопрос о связи множества M^{X^0} с множеством M в представлении $X = M + K$. (Напомним, что $K = \{x \mid Ax \leqslant 0\}$.)

Сначала покажем, что в качестве выпуклого многогранника M^{X^0} всегда можно взять множество $M \cap X^0$.

Действительно, так как и M, и X^0 — выпуклые многогранные множества, то их пересечение также является выпуклым многогранным множеством (докажите!). Из ограниченности M вытекает ограниченность пересечения. Таким образом, $M \cap X^0$ — выпуклый многогранник. Убедимся в выполнении равенства

$$X^0 = M \cap X^0 + K^{X^0}.$$

С этой целью покажем, что для любой точки $x^0 \in X^0$ в представлении $x^0 = m + y$, где $m \in M$, $y \in K$, обязательно $m \in X^0$, $y \in K^{X^0}$.

В самом длее, $d = \langle c, x^0\rangle = \langle c, m\rangle + \langle c, y\rangle \leqslant d + \langle c, y\rangle$, откуда имеем $\langle c, y\rangle \geqslant 0$. Допустим, что $\langle c, y\rangle > 0$, и рассмотрим точку $x(\lambda) = m + \lambda y$. Очевидно, что $x(\lambda) \in X$ при любом $\lambda > 0$. Тогда $\langle c, x(\lambda)\rangle = \langle c, m\rangle + \lambda\langle c, y\rangle$, откуда видно, что, взяв достаточно большое значение λ, можно получить допустимый вектор $x(\lambda)$, на котором значение линейной формы сколь угодно велико. В таком случае задача (3.2) не имеет решения, что противоречит предположению о непустоте множества X^0. Таким образом, $\langle c, y\rangle = 0$, что вместе с условием $y \in K$ дает $y \in K^{X^0}$. Кроме того, отсюда вытекает равенство $d = \langle c, m\rangle$, которое означает, что точка m является решением задачи (3.2), т. е. $m \in X^0$ Этими рассуждениями доказано включение $X^0 \subseteq M \cap X^0 + K^{X^0}$. Обратное включение очевидно.

Рассмотрим отдельно случай, когда множество X имеет крайние точки (т. е. оно регулярно). Напомним, что в этом случае выпуклый многогранник M в разложении

$X = M + K$ определяется однозначно — он является выпуклой оболочкой множества всех крайних точек из X. По теореме 3.2, множество X^0 также имеет крайние точки. Кроме того, согласно теореме 2.24, M^{X^0} — выпуклая оболочка множества крайних точек из X^0. Предыдущие рассуждения показывают, что в этом случае $M^{X^0} = M \cap X^0$.

Отметим, что каждая крайняя точка множества X^0 является крайней и в множестве X. Действительно, пусть x^0 — крайняя точка в X^0. Предположим, что она не является крайней в X. Тогда найдутся такие x^1, $x^2 \in X$, что $x^0 = \frac{1}{2} x^1 + \frac{1}{2} x^2$.

Поскольку подобное представление для точки x^0 невозможно в множестве X^0, то хотя бы одна из точек x^1, x^2 не принадлежит X^0. Допустим, $x^1 \notin X^0$. Тогда $\langle c, x^1 \rangle < d$. Воспользовавшись неравенством $\langle c, x^2 \rangle \leqslant d$, получаем $d = \langle c, x^0 \rangle = \frac{1}{2} \langle c, x^1 \rangle + \frac{1}{2} \langle c, x^2 \rangle < d$. Полученное противоречие доказывает, что x^0 является крайней точкой X.

Таким образом, в случае, когда множество X регулярно, выпуклый многогранник M^{X^0} описывается следующим образом: он является выпуклой оболочкой множества $\{x^1, x^2, \ldots, x^k\} \cap X^0$, где $\{x^i, i = 1, 2, \ldots, k\}$ — множество всех крайних точек в X.

Рассмотрим множество P^0 решений двойственной задачи (3.4). Нетрудно показать, что оно также является выпуклым многогранным множеством.

Множество P допустимых векторов двойственной задачи всегда имеет крайние точки (так как ранг матрицы ограничений задачи здесь равен m — числу переменных). В представлении $P = M^P + K^P$ множество M^P является выпуклой оболочкой крайних точек множества P, $K^P = \{p \mid A'p = 0,\ p \geqslant 0\}$.

Если теперь $\{p^1, p^2, \ldots, p^s\}$ — множество всех крайних точек P, то для множества P^0 имеет место представление

$$P^0 = M^{P^0} + K^{P^0},$$

где M^{P^0} — выпуклая оболочка множества $\{p^1, p^2, \ldots \ldots, p^s\} \cap P^0$,

$$K^{P^0} = \{p \mid A'p = 0, \quad \langle b, p \rangle = 0, \quad p \geqslant 0\}.$$

§ 5. Интерпретация двойственных оценок и дифференциальные свойства функции значений

1. Формально-математический аппарат теории двойственности, развитый в предыдущих параграфах, представляет собой удобный инструмент исследования линейных моделей. В связи с этим возникает мысль попытаться интерпретировать двойственную задачу линейного программирования в содержательных терминах прямой задачи.

В качестве примера рассмотрим модель составления производственного плана, описанную в § 2 гл. I. Напомним, что ее формальная запись представляет собой стандартную задачу линейного программирования:

$$\max \langle c, x\rangle$$
$$Ax \leqslant b, \quad x \geqslant 0. \tag{3.38}$$

Матрица A задает технологию производства — ее j-й столбец $a^j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})$ состоит из коэффициентов a_{ij}, описывающих расход i-го вида ресурса (сырья) при производстве одной единицы j-го продукта. Вектор $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ отражает запас всех видов ресурсов.

Двойственная задача в этом случае имеет вид

$$\min \langle b, p\rangle$$
$$A'p \geqslant c, \quad p \geqslant 0. \tag{3.39}$$

Пусть $p^* = (p_1^*, p_2^*, \ldots, p_m^*)$ — произвольное решение двойственной задачи. Теорема равновесия для стандартной задачи линейного программирования утверждает, что для любого решения x^* задачи (3.38) из неравенства $(Ax^*)_i < b_i$ следует, что $p_i^* = 0$. В связи с этим возникает мысль рассматривать число p_i^* как оценку дефицитности i-го вида ресурса: если при некотором оптимальном плане x^* задачи (3.38) ресурс b_i использован не полностью, то его оценка равна 0 — этот ресурс не дефицитен. Другими словами, данный факт означает, что увеличением запаса только этого ресурса нельзя добиться увеличения значения целевой функции.

Правда, может существовать другое решение $\bar{x}$ задачи (3.38), для которого будет иметь место равенство $(A\bar{x})_i = b_i$, которое означает, что при данном плане $\bar{x}$ производства i-й вид ресурса используется полностью.

Тем не менее, как будет показано ниже, вывод остается тем же: если хотя бы для одного решения p^* двойственной задачи (3.39) имеет место равенство $p_i^* = 0$, то увеличением запаса только i-го вида ресурса нельзя добиться увеличения значения целевой функции.

Таким образом, если хотя бы для одного оптимального плана x^* задачи (3.38) выполняется неравенство $(Ax^*)_i < b_i$ (т. е. i-й ресурс недефицитен), то для любого решения p^* двойственной задачи $p_i^* = 0$ и i-й ресурс не является дефицитным ни при каком другом оптимальном плане $\bar{x}$.

Имея в виду изложенную интерпретацию, координаты решения $p^* = (p_1^*, p_2^*, \ldots, p_m^*)$ двойственной задачи часто называют *двойственными оценками*.

2. В дальнейшем в этом параграфе обсуждение понятия двойственных оценок будет вестись в терминах задач (3.2) и (3.4).

Полученные при этом выводы, конечно, будут справедливы для любой задачи линейного программирования.

Чтобы изучить подробно зависимость максимального значения целевой функции $\langle c, x\rangle$ от вектора b правой части ограничений задачи (3.2), введем в рассмотрение следующие функции.

Значение d задачи (3.2) будем обозначать $d = F(b)$. В тех случаях, когда следует подчеркнуть зависимость числа d также от вектора c, будем писать $d = f(b, c)$.

Рассмотрим множества

$$B = \{z \in \mathbf{R}^m \mid \text{существует } x \in \mathbf{R}^n,\ z \geqslant Ax\},$$

$$C = \{w \in \mathbf{R}^n \mid \text{существует } p \in \mathbf{R}^m,\ p \geqslant 0,\ w = A'p\}.$$

Из теоремы двойственности непосредственно вытекает, что областью определения функции $f(b, c)$ является множество

$$B \times C = \{(z, w) \mid z \in B,\ w \in C\}.$$

Действительно, ясно, что если $(b, c) \notin B \times C$, т. е. если либо $b \notin B$, либо $c \notin C$, то по крайней мере одна из взаимодвойственных задач (3.2) и (3.4) недопустима. Следовательно, по теореме 3.4, задача (3.2) не имеет решения, т. е. функция f не определена для пары (b, c).

Наоборот, если $(b, c) \in B \times C$, то, как легко видеть, обе задачи (3.2) и (3.4) допустимы, откуда по теореме двойственности получаем, что задача (3.2) имеет решение, поэтому значение $f(b, c)$ определено.

Для некоторых задач линейного программирования может оказаться, что пара (b, c) является граничной точкой множества $B \times C$, так что небольшое изменение вектора b или вектора c может привести к тому, что задача (3.2) не будет иметь решения.

Чтобы иметь возможность изучать поведение функции $f(b, c)$ всюду в некоторой окрестности данной точки (b, c), в дальнейшем будем предполагать, что точка (b, c) не лежит на границе множества $B \times C$, т. е. является внутренней для этого множества.

Для иллюстрации данного требования рассмотрим

Пример.

$$\max (c_1 x_1 + c_2 x_2)$$
$$x_1 + 2x_2 \leqslant b_1, \quad 3x_1 + x_2 \leqslant b_2, \quad x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0. \tag{3.40}$$

Множество B для этой задачи определяется равенством

$$B = \{(z_1, z_2) | z_1 \geqslant x_1 + 2x_2, \ z_2 \geqslant 3x_1 + x_2, \ x_1 \geqslant 0, \ x_2 \geqslant 0\}.$$

Другими словами, точка (z_1, z_2) принадлежит множеству B, если найдется такая точка (x_1, x_2), что

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad z_1 \geqslant x_1 + 2x_2, \quad z_2 \geqslant 3x_1 + x_2.$$

Отсюда нетрудно видеть, что в данном случае $B = \mathbf{R}^2_+$ так как из условий $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$ следует, что если $(z_1, z_2) \in B$, то $z_1 \geqslant 0$, $z_2 \geqslant 0$. С другой стороны, если $z_1 \geqslant 0$, $z_2 \geqslant 0$, то $(z_1, z_2) \in B$, так как в качестве вектора (x_1, x_2) можно взять $(0, 0)$. Поэтому вектор $b = (b_1, b_2)$ является граничным для множества B только в том случае, когда $b_1 \geqslant 0$, $b_2 \geqslant 0$ и одно из чисел b_1, b_2 равно 0.

Можно также показать, что вектор $c = (c_1, c_2)$ принадлежит границе множества C для нашей задачи только в том случае, когда c коллинеарен одному из векторов $(1, 2)$, $(3, 1)$ — строкам матрицы A.

Теорема 3.6. *Функция $f(b, c)$ является положительно однородной первой степени по каждому из аргументов b и c, т. е.*

$$f(\lambda b, c) = \lambda f(b, c), \quad f(b, \lambda c) = \lambda f(b, c)$$

для всякого $\lambda \geqslant 0$.

Доказательство. Рассмотрим задачи

$$\max \langle c, x\rangle \qquad Ax \leqslant \lambda b, \tag{3.41}$$

$$\min \langle \lambda b, p\rangle \qquad A'p = c, \quad p \geqslant 0. \tag{3.42}$$

Пусть x^* — произвольное решение задачи (3.2), т. е. $\langle c, x^*\rangle = f(b, c)$. Тогда вектор λx^* допустим для задачи (3.41): $Ax^* \leqslant b \Rightarrow \Rightarrow A(\lambda x^*) \leqslant \lambda b$, так как $\lambda \geqslant 0$. Покажем, что λx^* — решение задачи (3.41). Пусть p^* — решение задачи (3.4). Тогда вектор p^* допустим для задачи (3.42). Поскольку по теореме двойственности $\langle c, x^*\rangle = \langle b, p^*\rangle$, то $\langle c, \lambda x^*\rangle = \langle \lambda b, p^*\rangle$, откуда по лемме 3.2 получаем, что λx^* — решение задачи (3.41). Следовательно, $f(\lambda b, c) = \langle c, \lambda x^*\rangle = \lambda\langle c, x^*\rangle = \lambda f(b, c)$. Аналогично доказывается однородность функции f по аргументу c.

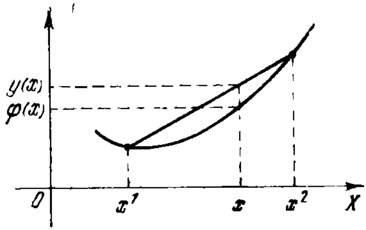

Рис. 3.2.

Определение 3.1. Функция $\varphi(x) = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, определенная на выпуклом множестве $X \subseteq \mathbf{R}^n$, называется *выпуклой*, если для любых векторов x^1, $x^2 \in X$, и любого числа α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, выполняется равенство

$$\varphi(\alpha x^1 + (1-\alpha)x^2) \leqslant \alpha\varphi(x^1) + (1-\alpha)\varphi(x^2).$$

Поясним введенное понятие на примере функции одной переменной.

Точка $x = \alpha x^1 + (1-\alpha)x^2$ принадлежит отрезку $[x^1, x^2]$, причем при изменении α от 1 до 0 эта точка пробегает весь отрезок.

Рассмотрим прямую, проходящую через точки $(x^1, \varphi(x^1))$, $(x^2, \varphi(x^2))$ плоскости. Уравнение этой прямой имеет вид

$$\frac{y - \varphi(x^1)}{x - x^1} = \frac{y - \varphi(x^2)}{x - x^2}.$$

Подставляя сюда выражение для точки x через концы отрезка x^1, x^2, получаем $y(x) = \alpha\varphi(x^1) + (1-\alpha)\varphi(x^2)$. Отсюда вытекает геометрическая интерпретация понятия выпуклой функции: график этой функции лежит под хордой, соединяющей две произвольные точки этого графика (рис. 3.2). Типичным примером выпуклой функции является функция n переменных $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2$ (см. упр. 19).

В некотором смысле двойственным к понятию выпуклой функции является понятие вогнутой функции.

Определение 3.2. Функция $\varphi(x)=\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, определенная на выпуклом множестве $X \subseteq \mathbf{R}^n$, называется *вогнутой*, если для любых x^1, $x^2 \in X$ и любого числа α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, выполняется неравенство $\varphi(\alpha x^1+(1-\alpha)x^2) \geqslant \geqslant \alpha\varphi(x^1)+(1-\alpha)\varphi(x^2)$.

Примером вогнутой функции служит $\sqrt{x_1+x_2+\ldots+x_n}$.

Теорема 3.7. *Функция $f(b, c)$ вогнута по b и выпукла по c.*

Доказательство. Покажем вогнутость функции f по векторному аргументу b. Пусть b^1, $b^2 \in B$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Нужно проверить выполнение неравенства $f(\alpha b^1 + (1-\alpha)b^2, c) \geqslant \alpha f(b^1, c)+(1-\alpha)f(b^2, c)$. Пусть x^* — решение задачи (3.2), когда в качестве вектора b взят вектор b^1, $\bar{x}$ — решение аналогичной задачи, когда $b=b^2$. Тогда $f(b^1, c)=\langle c, x^*\rangle$, $f(b^2, c)=\langle c, \bar{x}\rangle$. Рассмотрим вектор $\tilde{x}=\alpha x^*+(1-\alpha)\bar{x}$. Поскольку

$$A\tilde{x}=\alpha Ax^*+(1-\alpha)A\bar{x} \leqslant \alpha b^1+(1-\alpha)b^2,$$

то вектор $\tilde{x}$ допустим для задачи (3.2), в которой в качестве вектора b взят вектор $\alpha b^1+(1-\alpha)b^2$. Тогда

$$f(\alpha b^1+(1-\alpha)b^2, c) \geqslant \langle c, \tilde{x}\rangle =$$
$$=\alpha\langle c, x^*\rangle+(1-\alpha)\langle c, \bar{x}\rangle=\alpha f(b^1, c)+(1-\alpha)f(b^2, c).$$

Утверждение о выпуклости функции f по аргументу c доказывается аналогично.

Далее в этом параграфе нас будет интересовать лишь зависимость значения d задачи (3.2) от вектора b, поэтому будем пользоваться обозначением $d=F(b)$.

Выводы теорем 3.6 и 3.7 применительно к функции $F(b)$ таковы:

$F(b)$ положительно однородна первой степени, т. е. $F(\lambda b)=\lambda F(b)$ при $\lambda \geqslant 0$;

$F(b)$ вогнута на своей выпуклой области определения B.

Из теории выпуклого анализа известно, что вогнутая функция непрерывна внутри области определения. Докажем этот факт для функции $F(b)$ непосредственно.

Пусть P^0 — множество решений задачи (3.4):

$$\min \langle b, p\rangle$$
$$A'p = c, \quad p \geqslant 0.$$

Рассмотрим эту задачу с измененной целевой функцией:

$$\begin{gathered}\min \langle b + \Delta b, p\rangle \\ A'p = c, \quad p \geqslant 0,\end{gathered} \tag{3.43}$$

где $\Delta b = (\Delta b_1, \Delta b_2, \ldots, \Delta b_m)$ — приращение вектора b. Обозначим через P^0_Δ множество решений задачи (3.43).

Лемма 3.5. *Существует такое число* $\varepsilon > 0$, *что для всякого* Δb, *удовлетворяющего условию* $\|\Delta b\| < \varepsilon$, *выполняется включение* $P^0_\Delta \subseteq P^0$, *означающее, что всякое решение задачи* (3.43) *будет решением задачи* (3.4).

Доказательство. Множество P допустимых векторов задачи (3.4) (оно же является допустимым множеством для (3.43)) является выпуклым многогранным множеством. Следовательно, число его крайних точек конечно. Перечислим все эти точки множества P: $p^1, p^2, \ldots$ $\ldots, p^k$.

Пусть первые l из них являются решениями задачи (3.4), т. е. $d = \min\limits_{p\in P} \langle b, p\rangle = \langle b, p^i\rangle$, $i = 1, 2, \ldots, l$; $d <$ $< \langle b, p^i\rangle$, $i = l+1, \ldots, k$. Обозначим $\delta = \min\limits_{l+1 \leqslant j \leqslant k} \langle b, p^j\rangle$

Тогда $d < \delta$. Положим также $Q = \max\limits_{1\leqslant i \leqslant l} \|p^i\|$ В качестве числа ε, фигурирующего в формулировке леммы, можно взять число $\varepsilon = (\delta - d)/2Q$.

В самом деле, пусть $\|\Delta b\| < \varepsilon$. Покажем, что в таком случае

$$\langle b + \Delta b, p^i\rangle < \langle b + \Delta b, p^j\rangle, \tag{3.44}$$

где $1 \leqslant i \leqslant l$, $l+1 \leqslant j \leqslant k$. Отсюда будет следовать, что среди крайних точек многогранного выпуклого множества P оптимальными для задачи (3.43) могут быть лишь те, которые были оптимальными для задачи (3.4). Отсюда, используя утверждение теоремы 3.2, получим доказательство леммы 3.5.

Отметим, что

$$|\langle \Delta b,\ p^i\rangle| \leqslant \|\Delta b\|\|p^i\| \leqslant Q\|\Delta b\| < \varepsilon Q$$

для всех i, $1 \leqslant i \leqslant k$.

Для доказательства неравенства (3.44) перегруппируем его члены следующим образом:

$$\langle b,\ p^j\rangle - \langle b,\ p^i\rangle > \langle \Delta b,\ p^i\rangle - \langle \Delta b,\ p^j\rangle.$$

Однако

$$\langle b,\ p^j\rangle - \langle b,\ p^i\rangle = \langle b,\ p^j\rangle - d \geqslant \delta - d.$$

В то же время

$$\langle \Delta b,\ p^i\rangle - \langle \Delta b,\ p^j\rangle \leqslant \|\Delta b\|\|p^i\| + \|\Delta b\|\|p^j\| \leqslant$$
$$\leqslant 2Q\|\Delta b\| < 2Q\varepsilon = \delta - d.$$

Полученные неравенства доказывают лемму.

Теорема 3.8. *Функция $F(b)$ непрерывна в области определения.*

Доказательство. Пусть Δb — достаточно малый вектор, причем вектор $b + \Delta b$ принадлежит B — области определения функции F.

Поскольку, по предположению, задача (3.4) имеет решение, то $c \in C$, и поэтому задача (3.43) также имеет решение p^*. Так как приращение Δb мало, то по лемме 3.5 вектор p^* является решением задачи (3.4). По теореме двойственности, $F(b) = \langle b,\ p^*\rangle$, $F(b + \Delta b) = \langle b + \Delta b,\ p^*\rangle$, откуда $F(b - \Delta b) - F(b) = \langle \Delta b,\ p^*\rangle$. Если теперь менять приращение Δb, устремляя его к нулю, то в том случае, когда решение двойственной задачи неединственно, крайняя точка p^* может зависеть от Δb: $p^* = p^*(\Delta b)$, где $p^*(\Delta b)$ — одна из крайних точек $p^1, p^2, \ldots, p^k$. Тогда

$$|F(b + \Delta b) - F(b)| = |\langle \Delta b,\ p^*(\Delta b)\rangle| \leqslant$$
$$\leqslant \|\Delta b\|\|p^*(\Delta b)\| \leqslant Q\|\Delta b\|,$$

где (напомним) $Q = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant k} \|p^i\|$. Отсюда вытекает, что существует предел $\lim\limits_{\Delta b \to 0} (F(b + \Delta b) - F(b)) = 0$, что означает непрерывность функции F в точке $b \in B$.

3. В качестве иллюстрации рассмотрим функцию $F(b)$ для задачи линейного программирования (3.40). Чтобы избежать сложных чертежей, воспользуемся доказанной однородностью функции $F(b)$: будем рассматривать векторы b, принадлежащие гиперплоскости $b_1 = 4$. Если вектор $b=(b_1, b_2, b_3)$ таков, что $b_1>0$, $b_1\neq 4$, то рассмотрим число $\lambda=4/b_1$ и вектор $\lambda b=(4, 4b_2/b_1, 4b_3/b_1)$. По теореме 3.6 $F(b)=(1/\lambda)F(\lambda b)$. Значит, значение функции $F(b)$ легко восстановить, зная все ее значения на гиперплоскости $b_1=4$.

Итак, рассмотрим задачу

$$\max(2x_1+3x_2)$$
$$x_1+2x_2\leqslant 4,\quad 3x_1+x_2\leqslant b_2,\quad x_1+x_2\leqslant b_3, \tag{3.45}$$

где числа b_2, b_3 будем предполагать положительными.

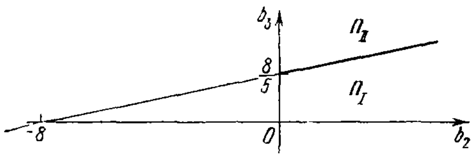

Рис. 3.3.

Крайними точками допустимого множества X для данной задачи могут служить лишь решения следующих систем уравнений:

$$\begin{cases}x_1+2x_2=4,\\ 3x_1+x_2=b_2,\end{cases}\Rightarrow x^1=\left(\frac{2b_2-4}{5},\ \frac{12-b_2}{5}\right);$$

$$\begin{cases}x_1+2x_2=4,\\ x_1+\ \ x_2=b_3,\end{cases}\Rightarrow x^2=(2b_3-4,\ 4-b_3);$$

$$\begin{cases}3x_1+x_2=b_2,\\ x_1+x_2=b_3,\end{cases}\Rightarrow x^3=\left(\frac{b_2-b_3}{2},\ \frac{3b_3-b_2}{2}\right).$$

Таким образом, допустимое множество X всегда имеет не более трех крайних точек.

Точка x^1 является крайней точкой множества X, если она удовлетворяет неравенству $x_1+x_2\leqslant b_3$, т. е. если $(2b_2-4)/5+(12-b_2)/5\leqslant b_3$, или $-b_2+5b_3\geqslant 8$. Аналогично, точка x^2 является крайней, если она удовлетворяет неравенству $3x_1+x_2\leqslant b_2$, или $3(2b_3-4)+(4-b_3)\leqslant$ $\leqslant b_2$, т. е. $-b_2+5b_3\leqslant 8$. Наконец, x^3 является крайней точкой, если $-b_2+5b_3\leqslant 8$.

Изобразим на координатной плоскости b_2Ob_3 две соответствующие области, на которые прямая $-b_2+5b_3=8$ разбивает множество всех ее точек (рис. 3.3). В области

$\Pi_{\rm I}$ выполняется неравенство $-b_2+5b_3<8$, в области $\Pi_{\rm II}$ — неравенство $-b_2+5b_3>8$.

Из предыдущих рассуждений следует, что если $(b_2, b_3)\in\Pi_{\rm I}$, то крайними являются точки x^2, x^3; если же $(b_2, b_3)\in\Pi_{\rm II}$, то крайней является только точка x^1. Если (b_2, b_3) лежит на прямой $-b_2+5b_3=8$, то все три крайние точки x^1, x^2, x^3 сливаются в одну.

Отсюда ясно, что в области $\Pi_{\rm II}$ решением задачи служит точка x^1 и, следовательно, $F(b)=\langle c, x^1\rangle=(b_2+28)/5$.

Чтобы найти решение в области $\Pi_{\rm I}$, сравним значение целевой функции на крайних точках x^2, x^3: $\langle c, x^2\rangle = b_3+4$, $\langle c, x^3\rangle=(-b_2+7b_3)/2$.

Поскольку в $\Pi_{\rm I}$ имеет место $-b_2+5b_3<8$, то $b_3+4>(-b_2+7b)/2$, т. е. $\langle c, x^2\rangle>\langle c, x^3\rangle$ и, следовательно, точка x^2 — оптимальный план и $F(b)=\langle c, x^2\rangle=b_3+4$.

Итак, имеем

$$F(b)=\begin{cases}(b_2+28)/5 & \text{при } b\in\Pi_{\rm II},\\ b_3+4 & \text{при } b\in\Pi_{\rm I}.\end{cases}$$

На прямой $-b_2+5b_3=8$ оба значения для $F(b)$ совпадают, так как, как и следовало ожидать, F непрерывна всюду.

Перейдем к изучению дифференциальных свойств функции $F(b)$.

В рассмотренном выше примере видно, что всюду внутри областей $\Pi_{\rm I}$ и $\Pi_{\rm II}$ функция $F(b)$ дифференцируема:

$$\text{в } \Pi_{\rm I}\ \frac{\partial F}{\partial b_2}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial b_3}=1;$$

$$\text{в } \Pi_{\rm II}\ \frac{\partial F}{\partial b_2}=\frac{1}{5},\quad \frac{\partial F}{\partial b_3}=0.$$

Другими словами, в области $\Pi_{\rm I}$ дефицитным является третий ресурс, в области $\Pi_{\rm II}$ — второй.

Ни в одной точке $b^0=(b_2^0, b_3^0)$ прямой $-b_2+5b_3=8$ функция $F(b)$ не дифференцируема, так как, если точка (b_2, b_3) приближается к данной прямой из области $\Pi_{\rm I}$, то

$$\lim_{b_2\to b_2^0}\frac{\partial F}{\partial b_2}=0,\quad \lim_{b_3\to b_3^0}\frac{\partial F}{\partial b_3}=1;$$

если же (b_2, b_3) приближается к точке (b_2^0, b_3^0) из области Π_{11}, то

$$\lim_{b_2 \to b_2^0} \frac{\partial F}{\partial b_2} = \frac{1}{5}, \quad \lim_{b_3 \to b_3^0} \frac{\partial F}{\partial b_3} = 0.$$

Таким образом, ни один из пределов $\lim\limits_{b_i \to b_3^0} \frac{\partial F}{\partial b_i}$ не существует, т. е. функция $F(b)$ недифференцируема в точке (b_2^0, b_3^0).

Читатель без труда убедится в том, что задача, двойственная к (3.45), имеет единственное решение в случае, когда точка (b_2, b_3) не лежит на прямой $-b_2 + 5b_3 = 8$, и неединственное решение, когда точка (b_2, b_3) лежит на данной прямой.

4. Оказывается, что дифференцируемость функции $F(b)$ зависит от структуры множества решений двойственной задачи.

Теорема 3.9. *Если двойственная задача* (3.4) *имеет единственное решение* p^*, *то функция* F *для задачи* (3.2) *в точке* b *дифференцируема и* $\partial F(b)/\partial b_i = p_i^*$, $i = 1, 2, \ldots, m$, *т. е.* $\operatorname{grad} F(b) = p^*$.

Доказательство непосредственно вытекает из рассуждений, проводимых при доказательстве теоремы 3.8. В самом деле, если решение p^* двойственной задачи единственно, то формула $F(b + \Delta b) = F(b) + \langle \Delta b, p^* \rangle$ справедлива при всех достаточно малых Δb. Это равенство означает, что функция F линейна в окрестности точки b и ее градиент в этой точке равен p^*.

В случае, когда решение двойственной задачи (3.4) неединственно, ситуация несколько сложней, однако и в этом случае крайние точки многогранного множества решений являются дифференциальными характеристиками функции $F(b)$.

Прежде чем приступить к изложению соответствующего результата, выясним причины неединственности решения двойственной задачи. Для этого рассмотрим следующие примеры:

$$\begin{array}{ll} \max\,(2x_1 + 3x_2) & \min\,(4p_1 + 6p_2) \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 4, & p_1 + 3p_2 = 2, \\ 3x_1 + x_2 \leqslant 6. & 2p_1 + p_2 = 3, \\ & p_1 \geqslant 0,\ p_2 \geqslant 0. \end{array}$$

Решение двойственной задачи единственно (рис. 3.4): $P^0 = (7/5,\ 1/5)$.

Добавим к ограничениям прямой задачи еще одно:

$$\begin{aligned}
&\max(2x_1 + 3x_2) &\quad& \min\left(4p_1 + 6p_2 + \frac{14}{5}p_3\right)\\
&x_1 + 2x_2 \leqslant 4, && p_1 + 3p_2 + p_3 = 2,\\
&3x_1 + \ x_2 \leqslant 6, && 2p_1 + p_2 + p_3 = 3,\\
&x_1 + \ x_2 \leqslant \frac{14}{5}. && p_1 \geqslant 0,\quad p_2 \geqslant 0,\quad p_3 \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Здесь решение прямой задачи по-прежнему единственно

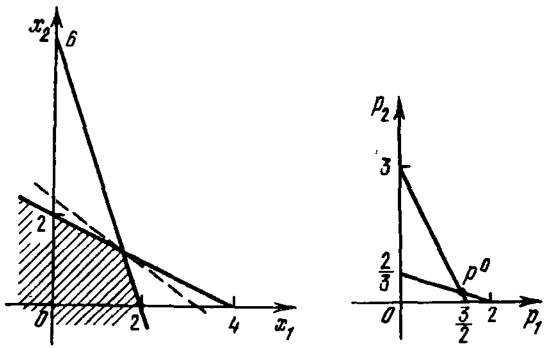

Рис. 3.4.

(рис. 3.5): $x^* = (8/5,\ 6/5)$, а множество решений двойственной задачи является отрезком с концами $p^* = (7/5,\ 1/5,\ 0)$, $\bar{p} = (1,\ 0,\ 1)$ (рис. 3.6).

Ясно, что добавление «лишнего» ограничения привело к тому, что единственное решение p^0 исходной задачи «раздулось» в отрезок. В общем случае происходит то же самое.

Пусть X^0 — множество решений задачи (3.2), P^0 — множество решений задачи (3.4).

Будем говорить, что ограничение $\langle a_i,\ x\rangle \leqslant b_i$ *существенно* для задачи (3.2), если для всякого $x^* \in X^0$ имеет место равенство $\langle a_i, x^*\rangle = b_i$, т. е. гиперплоскость $\langle a_i, x\rangle = b_i$ содержит множество решений задачи (3.2).

Пусть к ограничениям задачи (3.2) добавлено еще несколько существенных ограничений: $\langle a_s,\ x\rangle \leqslant b_s$, $s = m+1,\ \ldots,\ l$, являющихся следствием старых ограничений.

Тогда двойственная задача примет вид

$$\min\left(\sum_{i=1}^{m} b_i p_i + \sum_{s=m+1}^{l} b_s p_s\right)$$
$$\sum_{i=1}^{m} p_i a_i + \sum_{s=m+1}^{l} p_s a_s = c, \quad p_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, l. \tag{3.46}$$

Так как новые ограничения в задаче (3.2) являются следствиями старых и, кроме того, существенны, то из

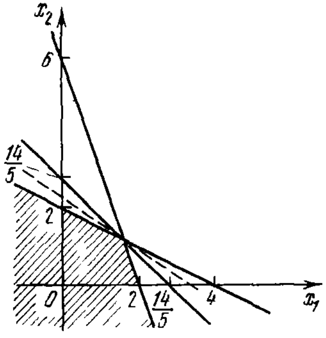

Рис. 3.5.

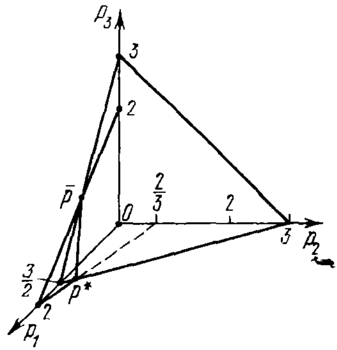

Рис. 3.6.

теоремы 2.27 легко вывести, что существуют неотрицательные числа λ_{is}, $i = 1, 2, \ldots, m$, $s = m + 1, \ldots, l$, такие, что

$$a_s = \sum_{i=1}^{m} \lambda_{is} a_i, \quad b_s = \sum_{i=1}^{m} \lambda_{is} b_i.$$

Учитывая равенства

$$\sum_{i=1}^{m} b_i p_i + \sum_{s=m+1}^{l} b_s p_s = \sum_{i=1}^{m} b_i p_i + \sum_{s=m+1}^{l} \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_{is} b_i\right) p_s = \sum_{i=1}^{m} b_i \left(p_i + \sum_{s=m+1}^{l} \lambda_{is} p_s\right),$$

$$\sum_{i=1}^{m} p_i a_i + \sum_{s=m+1}^{l} p_s a_s = \sum_{i=1}^{m} p_i a_i + \sum_{s=m+1}^{l} \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_{is} a_i\right) p_s = \sum_{i=1}^{m} a_i \left(p_i + \sum_{s=m+1}^{l} \lambda_{is} p_s\right)$$

и введя обозначение

$$\bar{p}_i = p_i + \sum_{s=m+1}^{l} \lambda_{is} p_s, \qquad (3.47)$$

двойственную задачу (3.46) можно записать в виде

$$\min \langle b, \bar{p} \rangle$$
$$A'\bar{p} = c, \quad \bar{p} \geqslant 0.$$

Очевидно, что это в точности задача (3.4).

Следовательно, всякому решению $\bar{p}$ задачи (3.4) соответствует столько решений задачи (3.46), сколько неотрицательных решений имеет система уравнений (3.47). При этом очевидно, что крайние точки в множестве решений задачи (3.46) получаются следующим образом: берется крайняя точка p^0 многогранного множества P^0 в качестве вектора $\bar{p}$ в (3.47) и ищутся крайние неотрицательные решения этой системы уравнений.

Таким образом, причиной неединственности решения двойственной задачи (3.47) являются «лишние» ограничения в прямой задаче (3.2), содержащие все решения этой задачи.

Обратимся к вопросу о дифференциальных свойствах функции $F(b)$ в случае неединственности решения задачи (3.4).

Пусть $\{p^1, p^2, \ldots, p^k\}$ — множество всех крайних точек выпуклого многогранного множества P^0.

Рассмотрим в пространстве $\mathbf{R}^m$ выпуклые конусы

$$K_r = \{s \in \mathbf{R}^m | \langle s, p^r \rangle - \langle s, p^i \rangle \leqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, k\}$$

для всех $r = 1, 2, \ldots, k$.

Ясно, что каждый из конусов K_r не пуст: $b \in K_r$, $r = 1, 2, \ldots, k$, так как $\langle b, p^r \rangle = d = \langle b, p^i \rangle$.

Лемма 3.6. *Объединение конусов K_r, $r = 1, 2, \ldots, k$, совпадает со всем пространством $\mathbf{R}^m$: $\bigcup_{r=1}^{k} K_r = \mathbf{R}^m$.*

Доказательство. Пусть $s \in \mathbf{R}^m$ и r — такой индекс, что $\langle s, p^r \rangle = \min_{1 \leqslant i \leqslant k} \langle s, p^i \rangle$. Очевидно, что $s \in K_r$.

Теорема 3.10. *Пусть $s \in \mathbf{R}^m$, $\|s\| = 1$,— вектор, задающий направление в точке b, $s \in K_r$. Тогда число $\langle s, p^r \rangle$ является производной функции F в точке b по направлению s.*

Доказательство. Пусть $\Delta b = \lambda s$, $\lambda \geqslant 0$, достаточно мало. Тогда множество решений задачи (3.43) является подмножеством P^0. Однако, $\langle b + \Delta b, p^r \rangle \leqslant \langle b + \Delta b, p^i \rangle$ при любом i, $1 \leqslant i \leqslant k$. Действительно, по определению K_r $\langle s, p^r \rangle \leqslant \langle s, p^i \rangle$, $i = 1, 2, \ldots, k$, следовательно, $\langle \Delta b, p^r \rangle = \langle \lambda s, p^r \rangle \leqslant \langle \lambda s, p^i \rangle = \langle \Delta b, p^i \rangle$. Значит, при всех достаточно малых $\lambda \geqslant 0$ точка p^r является решением задачи (3.43), где $\Delta b = \lambda s$. Отсюда так же, как в доказательстве теоремы (3.8), получаем $F(b + \lambda s) - F(b) = \langle \lambda s, p^r \rangle$, где $\lambda \geqslant 0$ — достаточно малое число. Тогда

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{F(b + \lambda s) - F(b)}{\lambda} = \langle s, p^r \rangle.$$

Следствие 1. *Если хотя бы для одного решения p^* двойственной задачи* (3.4) *выполняется равенство $p_i^* = 0$, то изменением значения координаты b_i вектора b при постоянных значениях остальных координат нельзя добиться увеличения максимального значения $F(b)$ целой функции $\langle c, x \rangle$ задачи* (3.2).

В самом деле, производная функции F по направлению $s = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, где число 1 стоит на месте i-й координаты, равна нулю: пусть $s \in K_r$, тогда

$$p_i^r = \langle s, p^r \rangle \leqslant \langle s, p^* \rangle = p_i^* = 0.$$

Следствие 2. *Пусть s, $\|s\| = 1$,— некоторый вектор. Тогда*

$$\frac{\partial F(b)}{\partial s} = \min_{1 \leqslant r \leqslant h} \langle s, p^r \rangle.$$

Действительно, если $s \in K_r$, то $\partial F(b)/\partial s = \langle s, p^r \rangle$. По определению конуса K_r $\langle s, p^r \rangle \leqslant \langle s, p^i \rangle$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

УПРАЖНЕНИЯ

С целью сокращения записи будем обозначать задачу (3.2) символом $\Pi(b, c)$, а двойственную ей задачу (3.4) через $D(b, c)$.

1. Доказать, что если $A \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ и в матрице A нет нулевых столбцов, то задача

$$\max \langle c, x \rangle$$
$$Ax \leqslant b, \quad x \geqslant 0$$

имеет решение.

2. Убедиться, что задача $\Pi(0, c)$ либо имеет решение $x = 0$, либо вовсе не имеет решения.

3. Показать, что если задача $\Pi(b, c)$ имеет решение и $b' \geqslant b$, то и задача $\Pi(b', c)$ также имеет решение.

4. Решить задачу

$$\min (x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + nx_n)$$

$$x_1 \geqslant 1,\ x_1 + x_2 \geqslant 2,\ x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 3,\ \ldots,\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geqslant n,$$

$$x_j \geqslant 0,\quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

5. Описать все решения задачи

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leqslant b,\quad x_j \geqslant 0,\quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

где $b,\ a_j > 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Показать, что если все числа $b\dfrac{c_j}{a_j}$ различны, то решение единственно.

6. Найти, при каких значениях λ и μ план $x^0 = (0, 4)$ оптимален для задачи

$$\max (x_1 + 3\lambda x_2)$$

$$-\mu x_1 - x_2 \leqslant -4,\quad 2x_1 - x_2 \leqslant 2,\quad 3\mu x_1 - x_2 \leqslant 8.$$

7. Доказать, что уравнение $\langle c, x\rangle = d$ является следствием системы уравнений $Ax = b$ тогда и только тогда, когда найдется такой вектор p, что $c = A'p$, $d = \langle b, p\rangle$.

8. Доказать, что задача

$$\max \langle c, x\rangle$$

$$Ax \leqslant b,\quad x \geqslant 0$$

имеет решение при всех $b \in \mathbf{R}^m$ и $c \in \mathbf{R}^n$ тогда и только тогда, когда существуют такие $x^0 \in \mathbf{R}^n$ и $p^0 \in \mathbf{R}^m$, что

$$Ax^0 < 0,\quad A'p^0 > 0,\quad p^0 \geqslant 0,\quad x^0 \geqslant 0.$$

9. Пусть x^0 — граничная точка многогранника $X = \{x \mid Ax \leqslant b\}$, т. е. существует строка $a_i \neq 0$ матрицы A, для которой $\langle a_i, x^0\rangle = b_i$. Доказать, что найдется такой вектор $c \neq 0$, что x^0 является решением задачи $\Pi(b, c)$.

10. Сопоставим граничной точке x^0 многогранника X множество C_{x^0} всех векторов c таких, что вектор x^0 является решением задачи $\Pi(b, c)$:

$$C_{x^0} = \{c \mid \langle c, x^0\rangle \geqslant \langle c, x\rangle\ \forall x \in X\}.$$

Доказать, что C_{x^0} — выпуклый конус.

11. Доказать, что множество B_c всех векторов b, при которых задача $\Pi(b, c)$ имеет решение, выпукло.

12. Пусть s — некоторый вектор, $\lambda > 0$ и задачи $\Pi(b, c)$, $\Pi(b + \lambda s, c)$ имеют решение. Доказать, что тогда имеет решение и задача $\Pi(b + \mu s, c)$, где $0 \leqslant \mu \leqslant \lambda$. Указание. Воспользоваться предыдущим упражнением.

Будем говорить, что направление s ($s \in \mathbf{R}^m$, $\|s\| = 1$) изменения вектора b *возможно* для задачи $\Pi(b, c)$, если задача $\Pi(b + \lambda s, c)$ имеет решение при достаточно малых $\lambda \geqslant 0$ (т. е. если существует $\partial F(b)/\partial s$).

13. Показать, что для задачи $\Pi(b, c)$ возможно любое направление s изменения вектора b в том и только в том случае, когда возможно направление $s^0 = -m^{1/2}e$, где $e = (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbf{R}^m$.

14. Доказать, что направление s возможно для задачи $\Pi(b, c)$ тогда и только тогда, когда для любого $p \in K^{P^0}$ (где $K^{P^0} = \{p \mid p \geqslant 0,\ A'p = 0,\ \langle b, p\rangle = 0\}$) выполняется неравенство $\langle s, p\rangle \geqslant 0$.

15. Доказать, что для задачи $\Pi(b, c)$ возможно любое направление изменения вектора b в том и только в том случае, когда множество P^0 решений задачи $D(b, c)$ ограничено. Указание. Воспользоваться предыдущим упражнением, положив $s = \pm v^i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, где v^i — i-й орт пространства $\mathbf{R}^m$.

16. Доказать, что если направление s возможно для задачи $\Pi(b, c)$, то $\partial F(b)/\partial s = \min\limits_{p \in P^0}\langle s, p\rangle$. Указание. Воспользоваться упражнением 14 и следствием 1 теоремы 3.10.

Для функции $F(b)$, $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$, *правой частной производной* $\partial F^+/\partial b_i$ называется производная $\partial F(b)/\partial v^i$ по направлению i-го орта v^i пространства $\mathbf{R}^m$, *левой частной производной* $\partial F^-/\partial b_i$ называется величина $-\partial F(b)/\partial(-v^i)$.

17. Показать, что если для задачи $\Pi(b, c)$ производная $\partial F^-/\partial b_i$ существует и $p = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$ — произвольное решение задачи $D(b, c)$, то

$$\frac{\partial F^+}{\partial b_i} \leqslant p_i \leqslant \frac{\partial F^-}{\partial b_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

18. Доказать, что если задача

$$\max\langle c, x\rangle$$
$$Ax = b$$

имеет решение, то любой допустимый вектор оптимален.

19. Убедиться в выпуклости функции $x_1^2 + x_2^2$ и вогнутости функции $\sqrt{x_1 + x_2}$.

ГЛАВА IV. ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРИИ ДВОЙСТВЕННОСТИ

Построенная в гл. III теория двойственности в линейном программировании является эффективным средством качественного исследования линейных задач. Ее применения обширны и разнообразны. В настоящей главе приводится несколько примеров использования теории двойственности в различных ситуациях.

§ 1. Основная теорема о матричных играх

Одной из наиболее популярных математических моделей, относящихся к вопросам принятия решений в условиях неопределенности, является модель игры двух лиц. Хотя теория игр возникла в ходе исследования так называемых «салонных» игр типа игры в карты, шахматы, рулетку и т. д., впоследствии она получила широкую область применения в экономике, военном деле и других сферах социальной деятельности.

Чтобы пояснить основные понятия, вводимые ниже, рассмотрим простейший пример игры двух лиц.

Игра состоит в том, что каждый из двух участников загадывает число 1 или 2, одновременно пытаясь угадать, какое число задумал противник. Если оба игрока угадали, или оба ошиблись, то игра считается закончившейся вничью. Если же правильно угадал лишь один игрок, то его выигрыш выражается в сумме чисел, загаданных обоими игроками.

Дадим формализованную запись этой игры.

Назовем *стратегией игрока* пару чисел (s, t), где s и t могут принимать два значения: 1 или 2. Число s означает загаданное число, t — число, которое по мнению игрока задумал противник. Таким образом, у каждого игрока имеется 4 стратегии: $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$.

Всю информацию о правилах игры удобно свести в следующую матрицу:

Игрок II

		(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)
Игрок I	(1, 1)	0	2	—3	0
	(1, 2)	—2	0	0	3
	(2, 1)	3	0	0	—4
	(2, 2)	0	—3	4	0

Элементы матрицы означают выигрыш игрока I. Например, если игрок I выбирает стратегию (2, 2) и при этом игрок II выбрал стратегию (2, 1), то выигрыш первого игрока составляет 4 единицы. Наоборот, в случае, когда игрок I выбирает стратегию (1, 2), а игрок II — стратегию (1, 1), то первый игрок проигрывает 2 единицы (его выигрыш равен (—2)).

Основная особенность приведенной игры состоит в том, что каждый из игроков обладает конечным набором стратегий. Игры с таким свойством называются *матричными.*

Общее описание матричной игры таково.

У игрока I имеется набор из m стратегий, нумеруемых числами $i = 1, 2, \ldots, m$; у игрока II имеется n стратегий, нумеруемых числами $j = 1, 2, \ldots, n$. Если игрок I выбрал стратегию i, а игрок II — стратегию j, то выигрыш первого игрока равен числу a_{ij} (это может быть и проигрышем, если $a_{ij} < 0$). Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}$$

называется *матрицей игры.*

Матричной игрой являются, например, шахматы, только там число стратегий каждого игрока очень велико.

Пусть $x = (0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0) \in \mathbf{R}^m$, где число 1 стоит на месте с координатой i, означает стратегию i игрока I, а вектор $y = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in \mathbf{R}^n$, где число 1 стоит на месте j-й координаты, означает j-ю стратегию игрока II. Тогда, как нетрудно видеть, исход игры, т. е. выигрыш первого игрока, равен

$$a_{ij} = \langle x, Ay \rangle = \langle A'x, y \rangle.$$

Теория игр выдвигает принцип выбора стратегий, являющийся принципом гарантированного результата. Это означает, что первый игрок должен рассуждать следующим образом: если выбрать стратегию i_1, то игрок II может так выбрать свою стратегию j_1, что число $a_{i_1 j_1}$ окажется самым маленьким из чисел $a_{i_1 j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, т. е.

$$a_{i_1 j_1} = \min_{1 \leqslant j \leqslant n} a_{i_1 j}.$$

Вообще говоря, игрок II заранее не знает выбора i_1 игрока I и должен указывать свою стратегию j_1 независимо. Однако он из каких-либо соображений может выбрать как раз стратегию j_1. В таком случае при неудачном выборе i_1 первый игрок может понести большой ущерб. Так, в нашем примере, если игрок I возьмет $i_1 = 3$, т. е. выберет стратегию (2, 1), то он может проиграть 4 единицы (если игрок II выбирает $j_1 = 4$, т. е. стратегию (2, 2)).

В связи с этим предлагается проявить осторожность и выбрать стратегию i_1 таким образом, чтобы число $a_{i_1 j_1} = \min\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} a_{i_1 j}$ было как можно бо́льшим, т. е.

$$a_{i_1 j_1} = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \min_{1 \leqslant j \leqslant n} a_{ij}.$$

Обращаясь к нашему примеру, видим

$$a_{1 j_1} = \min_{1 \leqslant j \leqslant 4} a_{1j} = -3, \quad j_1 = 3,$$

$$a_{2 j_1} = \min_{1 \leqslant j \leqslant 4} a_{2j} = -2, \quad j_1 = 1,$$

$$a_{3 j_1} = \min_{1 \leqslant j \leqslant 4} a_{3j} = -4, \quad j_1 = 4,$$

$$a_{4 j_1} = \min_{1 \leqslant j \leqslant 4} a_{4j} = -3, \quad j_1 = 2.$$

Поэтому со стороны первого игрока будет благоразумным выбрать стратегию i_1 так, чтобы

$$a_{i_1 j_1} = \max_{1 \leqslant i \leqslant 4} a_{i j_1} = \max\{-3, -2, -4, -3\}.$$

Ясно, что следует взять $i_1 = 2$; при этом $j_1 = 1$ и $a_{i_1 j_1} = -2$.

Таким образом, если игрок I выберет стратегию $i_1 = 2$, т. е. (1, 2), то имеется гарантия, что он проиграет не более 2-х единиц.

Если рассуждать таким же образом за игрока II, то ясно, что ему следует выбирать свою стратегию j_2 так, чтобы число

$$a_{i_2 j_2} = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} a_{ij_2}$$

было как можно меньше, т. е.

$$a_{i_2 j_2} = \min_{1 \leqslant j \leqslant n} \max_{1 \leqslant i \leqslant m} a_{ij}.$$

При этом, как нетрудно видеть, $j_2 = 2$ (т. е. стратегия (1, 2), как и у игрока I), $i_2 = 1$, $a_{i_2 j_2} = 2$.

Следовательно, игрок II также может гарантировать, что его проигрыш не превысит числа 2.

Казалось бы, ситуация ясна: игроку I следует выбрать стратегию $i_1 = 2$, игроку II — стратегию $j_2 = 2$, и при этом игра закончится вничью, так как $a_{22} = 0$.

Однако здесь кроется парадокс: матрица A игры известна обоим игрокам, поэтому, например, игрок I может провести все рассуждения не только за себя, но и за игрока II. Поняв, что игрок II выберет стратегию $j_2 = 2$, первый игрок сообразит, что в этом случае ему следует взять $i_1 = 1$ и выиграть 2 единицы. Но игрок II, проделав те же рассуждения, также может отказаться от стратегии $j_2 = 2$. Понятно, что подобным образом можно рассуждать бесконечно и не прийти к окончательному решению о выборе стратегии.

Рассмотрим теперь игру со следующей матрицей:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 8 & 0 \\ 6 & 4 & 5 & 5 \\ 7 & 2 & -3 & 6 \\ -10 & -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно вычислить, что здесь

$$a_{i_1 j_1} = \max_{1 \leqslant i \leqslant 4} \min_{1 \leqslant j \leqslant 4} a_{ij} = 4,$$

при этом $i_1 = 2$, $j_1 = 2$.

С другой стороны,

$$a_{i_2 j_2} = \min_{1 \leqslant j \leqslant 4} \max_{1 \leqslant i \leqslant 4} a_{ij} = 4,$$

при этом $i_2 = 2$, $j_2 = 2$.

Это означает, что стратегия $i = 2$ первого игрока гарантирует ему выигрыш не менее 4. В то же время второй игрок может себе гарантировать проигрыш не более

4 единиц. Поэтому *ясно*, что обе стратегии $i=2$ и $j=2$ являются оптимальными для игроков I и II соответственно. Следовательно, в этой игре существует пара стратегий, приемлемая для обоих игроков.

Разница между приведенными двумя примерами теперь ясна. В первом случае каждый игрок может себе гарантировать выигрыш (-2), но надеется получить больше. Во втором случае у каждого игрока есть стратегия, которая обеспечивает ему гарантированный результат, и нет способа получить больше. Чтобы различать эти две возможные ситуации в общем случае, введем некоторые понятия.

Определение 4.1. Число

$$\underline{v} = \max_{1\leqslant i\leqslant m} \min_{1\leqslant j\leqslant n} a_{ij}$$

назовем *нижним значением игры*, число

$$\bar{v} = \min_{1\leqslant j\leqslant n} \max_{1\leqslant i\leqslant m} a_{ij}$$

— ее *верхним значением*.

Лемма 4.1. $\underline{v} \leqslant \bar{v}$.

Доказательство. Ясно, что

$$\min_{1\leqslant j\leqslant n} a_{ij} \leqslant a_{ij}, \quad j=1, 2, \ldots, n, \quad i=1, 2, \ldots, m.$$

Отсюда получаем

$$\max_{1\leqslant i\leqslant m} \min_{1\leqslant j\leqslant n} a_{ij} \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant m} a_{ij}, \quad j=1, 2, \ldots, n.$$

Окончательно

$$\max_{1\leqslant i\leqslant m} \min_{1\leqslant j\leqslant n} a_{ij} \leqslant \min_{1\leqslant j\leqslant n} \max_{1\leqslant i\leqslant m} a_{ij}.$$

Как было показано, в первом примере $\underline{v}=-2$, $\bar{v}=2$, т. е. $\underline{v}<\bar{v}$; во втором примере $\underline{v}=\bar{v}=4$.

Определение 4.2. Будем говорить, что игра имеет *седловую точку*, если $\underline{v}=\bar{v}=v$. В этом случае число v называется *значением игры*.

Определение 4.3. Стратегию i_0 игрока I назовем *максиминной*, *если*

$$\min_{1\leqslant j\leqslant n} a_{i_0 j} = \max_{1\leqslant i\leqslant m} \min_{1\leqslant j\leqslant n} a_{ij} = \underline{v}.$$

Аналогично, стратегию j_0 игрока II назовем *минимаксной*, если

$$\max_{1 \leq i \leq m} a_{ij_0} = \min_{1 \leq j \leq n} \max_{1 \leq i \leq m} a_{ij} = \bar{v}.$$

Обе эти стратегии назовем *гарантирующими*.

Ясно, что всегда существует максиминная и минимаксная стратегии игроков I и II соответственно. Отметим, что, кроме того, у каждого игрока может быть несколько гарантирующих (максиминных у первого и минимаксных у второго) стратегий.

Теорема 4.1. *Матричная игра имеет седловую точку тогда и только тогда, когда для любой пары* (i_0, j_0) *гарантирующих стратегий выполняется неравенство*

$$a_{ij_0} \leqslant a_{i_0j_0} \leqslant a_{i_0j}, \tag{4.1}$$

для всех $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$.

Доказательство. Пусть игра имеет седловую точку, т. е. $\underline{v} = \bar{v} = v$. Тогда

$$v = \min_{1 \leq j \leq n} a_{i_0j} \leqslant a_{i_0j}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

С другой стороны,

$$v = \max_{1 \leq i \leq m} a_{ij_0} \geqslant a_{ij_0}, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

откуда $a_{i_0j_0} \leqslant v \leqslant a_{i_0j_0}$, т. е. $v = a_{i_0j_0}$, $a_{ij_0} \leqslant a_{i_0j_0} \leqslant a_{i_0j}$.

Наоборот, пусть выполняется (4.1). Тогда

$$\bar{v} = \max_{1 \leq i \leq m} a_{ij_0} \leqslant a_{i_0j_0}$$

и

$$\underline{v} = \min_{1 \leq j \leq n} a_{i_0j} \geqslant a_{i_0j_0},$$

т. е. $\bar{v} \leqslant \underline{v}$. Поскольку уже доказано, что всегда $\bar{v} \geqslant \underline{v}$, то $\bar{v} = \underline{v}$.

Определение 4.4. Если игра имеет седловую точку, то любая пара гарантирующих стратегий (i_0, j_0) называется *седловой точкой*.

Из всего предыдущего материала данного параграфа ясно, что если игра имеет седловую точку (i_0, j_0), то наиболее разумными стратегиями игроков I и II являются стратегии i_0 и j_0 соответственно. В случае, когда седловой точки нет, становится неясно, какую стратегию считать разумной. В связи с этим создателем теории игр Джоном фон Нейманом было предложено расширить понятие стратегии следующим образом. Представим себе, что игра повторяется много раз, так что игрока интересует не выигрыш в каждой отдельной партии, а средний выигрыш по многим партиям.

Назовем *смешанной стратегией* первого игрока вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, где $x_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $\sum\limits_{i=1}^{m} x_i = 1$, координату x_i которого будем понимать как вероятность (или частоту) применения стратегии с номером i. Заметим, что частным случаем смешанной стратегии является стратегия вида $x = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, где число 1 стоит на некотором месте i. Это означает, что во всех партиях будут применяться стратегия i. Стратегии такого вида будем называть *чистыми*.

Аналогично введем понятие смешанной стратегии $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ для игрока II: $y_j \geqslant 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$; $\sum\limits_{j=1}^{n} y_j = 1$.

Применение смешанной стратегии $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ состоит в следующем. Игрок I указывает вектор x, описывающий, с какой вероятностью в каждой партии будет использоваться та или иная его чистая стратегия. После этого он передает право конкретного выбора стратегии в каждой партии некоему механизму, осуществляющему случайный выбор чистой стратегии в соответствии с вектором x.

Теперь, даже если у второго игрока существует способ узнавать стратегию первого, то, тем не менее, он не будет знать заранее его конкретного выбора в данной партии.

Если игрок I выбрал смешанную стратегию x, а игрок II — смешанную стратегию y, то вероятность (частота) применения пары чистых стратегий (i, j) равна $x_i y_j$, при этом выигрыш первого игрока будет равен a_{ij} в каждой такой партии и $a_{ij} x_i y_j N$ за N партий. Поэтому суммарный выигрыш игрока I за N партий будет равен

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j N = N \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j,$$

а средний выигрыш будет равен

$$M(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = \langle x, Ay \rangle. \qquad (4.2)$$

Число $M(x, y)$ на языке теории вероятностей называется *математическим ожиданием выигрыша* в каждой партии в случае применения смешанных стратегий x и y.

Определение 4.5. Пара смешанных стратегий (x^0, y^0) называется *седловой точкой функции* $M(x, y)$, если имеют место следующие неравенства:

$$M(x, y^0) \leqslant M(x^0, y^0) \leqslant M(x^0, y), \tag{4.3}$$

т. е. если

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j^0 \leqslant \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i^0 y_j^0 \leqslant \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i^0 y_j \tag{4.4}$$

для всех смешанных стратегий x и y первого и второго игрока соответственно.

Как и в том случае, когда игра имеет седловую точку в чистых стратегиях, наличие пары (x^0, y^0), являющейся седловой точкой игры в смешанных стратегиях, свидетельствует о том, что первый игрок, выбрав стратегию x^0, обеспечивает себе гарантированный выигрыш $M(x^0, y^0)$. В самом деле, если игрок II выберет любую стратегию y, то выигрыш первого игрока будет не меньше числа $M(x^0, y^0)$, так как $M(x^0, y) \geqslant M(x^0, y^0)$. С другой стороны, второй игрок выбором стратегии y^0 добивается того, что выигрыш игрока I не может быть больше числа $M(x^0, y^0)$ (это вытекает из первого неравенства в (4.3)).

Таким образом, можно констатировать, что в случае наличия седловой точки (x^0, y^0) стратегия x^0 представляет собой разумный выбор игрока I, стратегия y^0 — разумный выбор игрока II. Именно поэтому представляет особый интерес следующая теорема Джона фон Неймана, оправдывающая введение смешанных стратегий.

Теорема 4.2. *Всякая матричная игра имеет седловую точку в смешанных стратегиях.*

Лемма 4.2. *Для того чтобы пара смешанных стратегий (x^0, y^0) образовывала седловую точку функции $M(x, y)$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^0 \leqslant M(x^0, y^0) \leqslant \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i^0 \tag{4.5}$$

при любых $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Доказательство. Пусть (x^0, y^0) — седловая точка. Так как неравенство (4.4) выполняется для любых смешанных стратегий x и y, то взяв $x = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots \ldots, 0)$, где число 1 стоит на месте i-й координаты, а $y =$

$= (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, где 1 стоит на месте j-й координаты, и подставив эти векторы в (4.4), получаем неравенства (4.5).

Наоборот, пусть (x^0, y^0) — некоторая пара стратегий, для которых выполняются неравенства (4.5) при всех $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$. Для доказательства леммы нужно убедиться, что в таком случае неравенства (4.4) выполняются при всех x и y.

Отметим прежде всего, что с использованием операции умножения матрицы на вектор неравенства (4.4) можно записать в виде

$$\langle x, Ay^0\rangle \leqslant \langle x^0, Ay^0\rangle \leqslant \langle A'x^0, y\rangle, \tag{4.6}$$

а неравенства (4.5) в виде

$$Ay^0 \leqslant v_m, \tag{4.7}$$

$$A'x^0 \geqslant v_n, \tag{4.8}$$

где v_m — m-мерный вектор, все координаты которого равны $v = \langle x^0, Ay^0\rangle$, а v_n — n-мерный вектор, все координаты которого равны тому же числу $v = \langle A'x^0, y^0\rangle$.

Умножим неравенство (4.7) скалярно на вектор x (напомним, что $x \geqslant 0$): $\langle x, Ay^0\rangle \leqslant \langle v_m, x\rangle$. Число $\langle v_m, x\rangle$ равно v, поскольку $\langle v_m, x\rangle = v\sum_{i=1}^{m} x_i$, $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$. Тогда $\langle x, Ay^0\rangle \leqslant v$. Аналогично получаем $\langle A'x^0, y\rangle \geqslant v$.

Обсудим наглядный смысл доказанной леммы. Как отмечалось, если пара стратегий (x^0, y^0) образует седловую точку, то стратегия x^0 является гарантирующей стратегией против всего множества смешанных стратегий игрока II. Доказанная лемма утверждает, что достаточно требовать, чтобы стратегия x^0 была гарантирующей только против множества чистых стратегий второго игрока. Имеет место аналогичное утверждение и относительно y^0.

Матрица A игры может быть произвольной $m \times n$-матрицей. Тем не менее оказывается, что при необходимости можно считать матрицу A положительной. Именно, имеет место следующий простой факт.

Лемма 4.3. *Пусть a — произвольное число и матрица $\bar{A}$ составлена из элементов $\bar{a}_{ij} = a_{ij} + a$. Пусть пара (x^0, y^0) образует седловую точку игры с матрицей A. Тогда эта же пара смешанных стратегий является седловой точкой игры с матрицей $\bar{A}$.*

Доказательство. Обозначим функцию выигрыша игры с матрицей $\bar{A}$ через $\overline{M}(x, y)$. Тогда

$$\overline{M}(x, y) = \langle x, \bar{A}y\rangle = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+a)x_iy_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j + a\sum_{i=1}^{m} x_i \sum_{j=1}^{n} y_j = \langle x, Ay\rangle + a = M(x, y) + a.$$

Так как (x^0, y^0) — седловая точка игры с матрицей A, то, воспользовавшись предыдущей леммой, можем написать

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{ij}y_j^0 = \sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+a)y_j^0 \leqslant M(x^0, y^0) + a = \overline{M}(x^0, y^0),$$
$$i = 1, 2, \ldots, m.$$

Таким образом, доказано выполнение первого неравенства из (4.5) для пары стратегий (x^0, y^0) в игре с матрицей $\bar{A}$. Аналогично доказывается второе неравенство в (4.5).

Из того, что согласно утверждению леммы 4.2 выполнение неравенств (4.5) дает необходимое и достаточное условие седловой точки, заключаем, что пара (x^0, y^0) является седловой точкой игры с матрицей $\bar{A}$.

Перейдем к доказательству теоремы Джона фон Неймана. Будем при этом считать матрицу A положительной.

Рассмотрим следующие задачи линейного программирования:

$$\begin{gathered}\min \langle u, e_m\rangle \\ A'u \geqslant e_n, \quad u \geqslant 0,\end{gathered} \tag{4.9}$$

где $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$, e_n — n-мерный вектор, все координаты которого равны 1;

$$\begin{gathered}\max \langle w, e_n\rangle \\ Aw \leqslant e_m,\end{gathered} \tag{4.10}$$

где $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$, e_m — m-мерный вектор, все координаты которого равны 1.

Очевидно, что задачи (4.9) и (4.10) взаимодвойственны.

Поскольку у матрицы A (и значит, у A') все элементы положительны, то задача (4.9) допустима; при этом в качестве допустимого вектора можно взять вектор u с достаточно большими положительными координатами.

Задача (4.10) также допустима: вектор $w = 0$ удовлетворяет всем ограничениям.

Из теоремы двойственности заключаем, что обе задачи имеют решения (u^0 и w^0 соответственно) и одинаковые значения $\langle u^0, e_m\rangle = \langle w^0, e_n\rangle = d$. Очевидно также, что $d = \langle w^0, e_n\rangle > 0$, так как любой вектор w с достаточно малыми положительными координатами является допустимым для задачи (4.10) и $\langle e_n, w^0\rangle \geqslant \langle e_n, w\rangle$.

Покажем, что пара смешанных стратегий $x^0 = \frac{1}{d}u^0$, $y^0 = \frac{1}{d}w^0$ является седловой точкой игры.

В самом деле, из (4.9) следует, что $A'x^0 \geqslant v_n$, а из (4.10) получаем $Ay^0 \leqslant v_m$, где, как и прежде, $v_n = v \cdot e_n$, и $v_m = v \cdot e_m$, $v = 1/d$. При этом по теореме равновесия имеем $\langle u^0, Aw^0\rangle = \langle u^0, e_m\rangle = d$. Подставляя сюда $u^0 = dx^0$, $w^0 = dy^0$, получаем $\langle x^0, Ay^0\rangle = v$.

Как следует из леммы 4.2, полученные соотношения, связывающие векторы x^0, y^0, число v и матрицу A, свидетельствуют о том, что пара (x^0, y^0) является седловой точкой игры, а число v — ее значением.

§ 2. О проблеме существования ядра в кооперативной игре n лиц

Основная теорема о матричных играх, изложенная в предыдущем параграфе, в определенном смысле полностью решает проблему выбора стратегии для тех социально-экономических ситуаций, которые описываются моделью антагонистической игры двух лиц. Вместе с тем ясно, что при изучении социальных явлений никоим образом нельзя ограничиваться исследованием двусторонних конфликтных ситуаций. Гораздо более реальным является случай, когда сталкиваются интересы большого числа индивидуумов, необязательно являющихся антагонистами. Изучением довольно широкого круга моделей подобного характера занимается теория игр n лиц (см. [19—21]). Не имея возможности остановиться сколь-нибудь подробно на всем множестве идей этого раздела математики, обратим внимание на проблему, связанную с понятием решения кооперативной игры n лиц.

Для пояснения основных понятий этой теории изложим одну из возможных интерпретаций (весьма условную) основной постановки задачи.

В некоторой капиталистической стране ряд промышленных компаний получили предложение заключить выгодный контракт. Пусть n — число компаний, нумеруемых числами 1, 2, ..., n, N — все множество компаний, $N = \{1, 2, \ldots, n\}$. Известно, что стоимость всего контракта составит сумму $v(N)$. Между всеми заинтересованными промышленными компаниями начались переговоры с целью договориться о заключении контракта. Основным предметом переговоров является распределение суммы $v(N)$ между участниками. Дело осложняется тем, что, вообще говоря, любая часть участников может объединиться в коалицию и, отказавшись от данного контракта, заключить вместо него другой контракт на стороне.

Любое подмножество S участников, $S \subseteq N$, будем называть *коалицией*. Пусть коалиция S имеет возможность самостоятельно заключить на стороне контракт на сумму $v(S)$ (это число может равняться и нулю). Допустим, что в результате предварительных переговоров предложен следующий дележ: компания с номером i получает величину x_i, $x_i \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{n} x_i = v(N)$.

Ясно, что если сумма величин x_i с номерами $i \in S$ (т. е. общая сумма, предлагаемая коалиции S) меньше величины $v(S)$, то компании, которые входят в коалицию S, откажутся от предложенного дележа на том основании, что у них есть более выгодное предложение. Таким образом, проблема состоит в нахождении вектора $(x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n)$, описывающего дележ суммы контракта $v(N)$, удовлетворяющего все возможные коалиции. Оказывается, что такой дележ существует не всегда.

Перейдем к формальному описанию кооперативной игры n лиц.

Для игры n лиц обозначим множество всех участников через $N = \{1, 2, \ldots, n\}$. Любое непустое подмножество S множества N назовем коалицией. Отметим, что коалиция может быть как одноэлементным множеством, так и совпадать со всем N.

Предполагается, что на подмножествах множества N задана функция, сопоставляющая каждому подмножеству $S \subseteq N$ неотрицательное вещественное число $v(S)$. Функция v называется *характеристической функцией игры*. На нее накладываются два следующих условия:

1) $$v(\varnothing) = 0. \qquad (4.11)$$

Это условие естественно, поскольку (как читатель помнит) символ $\varnothing$ означает пустое множество.

2) $$v(S \cup T) \geqslant v(S) + v(T), \tag{4.12}$$

если $S \cap T = \varnothing$.

Условие 2) означает, что две непересекающиеся коалиции в результате объединения своих усилий смогут получить не меньше чем в сумме каждая по отдельности. Отсюда, в частности, вытекает, что $v(N) \geqslant v(S)$ для любой коалиции S, так что каждая коалиция (если $v(N) > v(S)$) может рассчитывать при согласованном решении получить больше, чем самостоятельно.

Определение 4.6. *Дележом игры* называется вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющий условиям

1) $\sum\limits_{i \in N} x_i = v(N)$;

2) $x_i \geqslant v(\{i\}), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$

Второе требование этого определения означает, что i-му участнику имеет смысл предлагать лишь такую сумму, которая не меньше той, что он может получить, опираясь только на свои возможности.

Пусть два вектора $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots \ldots, y_n)$ — два дележа в игре. Предположим, что участники должны выбрать только один из этих векторов. Допустим, далее, что вектор x является более выгодным для коалиции S, чем вектор y. Когда коалиция S может настаивать на том, чтобы все участники согласились на дележ x, угрожая в противном случае выйти из игры? Ясно, что коалиция S может позволить себе это лишь в том случае, когда величина $v(S)$ не меньше суммарного дохода коалиции S, обеспечиваемого дележом x. Следуя этому рассуждению, введем одно из важнейших понятий теории кооперативных игр.

Определение 4.7. Пусть x, y — два дележа и S — некоторая коалиция. Говорят, что *x доминирует y по коалиции S*, если

1) $x_i > y_i$ для всех $i \in S$;

2) $\sum\limits_{i \in S} x_i \leqslant v(S)$.

Будем в этом случае писать $x \underset{S}{\succ} y$.

Определение 4.8. Говорят, что *x доминирует y* (обозначается $x \succ y$), если существует хоть одна коалиция S, для которой $x \underset{S}{\succ} y$.

Представляют интерес различные частные случаи кооперативных игр. Нам в иллюстративных целях понадобится один из них.

Определение 4.9. Игра называется *симметричной*, если значение $v(S)$ характеристической функции зависит только от числа элементов в коалиции S.

Перейдем к обсуждению того, что следует понимать под решением кооперативной игры. Необходимо сразу отметить, что скорее всего невозможно даже для конкретной игры указать один какой-нибудь дележ, который был бы максимально выгоден каждому из участников, т. е. такой, что в любой возможной коалиции всякий участник не мог бы получить больше. Поэтому возникает идея как можно более сузить множество дележей, допускаемых для дальнейшего рассмотрения, с тем чтобы никакая коалиция участников не могла обоснованно возражать против любого дележа из этого множества.

Определение 4.10. *Ядром игры* называется множество всех ее недоминируемых дележей. Ядро игры с характеристической функцией v обозначается $C(v)$.

Теорема 4.3. *Ядро игры есть множество всех таких векторов* $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, *что*

1) $\sum\limits_{i \in S} x_i \geqslant v(S) \quad \forall S \subset N$;

2) $\sum\limits_{i \in N} x_i = v(N)$.

Доказательство. Пусть вектор x удовлетворяет условиям 1), 2). Положив $S=\{i\}$, видим, что условие 1) превращается в требование $x_i \geqslant v(\{i\})$, что вместе с 2) означает, что вектор x является дележом. Покажем, что вектор x не может доминироваться никаким другим дележом y. В самом деле, допустим, что $y_i > x_i$ для всех $i \in S$, где S — некоторая коалиция. Тогда $\sum\limits_{i \in S} y_i > \sum\limits_{i \in S} x_i \geqslant v(S)$, т. е. $\sum\limits_{i \in S} y_i > v(S)$, а это значит, что y не может доминировать x ни по какой коалиции S. Следовательно, $x \in C(v)$. Осталось показать, что если вектор y не удовлетворяет хотя бы одному из условий 1), 2) теоремы, то он не принадлежит ядру. Ясно, однако, что если y не удовлетворяет условию 2), то он не является дележом вообще. Допустим теперь, что для y не выполняется условие 1), т. е. существует такая коалиция S, что $\sum\limits_{i \in S} y_i < v(S)$.

Тогда существует $\varepsilon > 0$, для которого $\sum_{i \in S} y_i = v(S) - \varepsilon$. Положим

$$\alpha = v(N) - v(S) - \sum_{i \in N \setminus S} v(\{i\}).$$

Используя (4.12), нетрудно убедиться в том, что $\alpha \geqslant 0$. Пусть $|S|$ — число элементов в коалиции S.

Построим вектор $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$, положив

$$z_i = \begin{cases} y_i + \dfrac{\varepsilon}{|S|}, & \text{если } i \in S, \\ v(\{i\}) + \dfrac{\alpha}{n - |S|}, & \text{если } i \notin S. \end{cases}$$

Проверим, что z является дележом. Действительно, очевидно, что $z_i \geqslant v(\{i\})$ при $i \notin S$. Если $i \in S$, то $z_i \geqslant y_i \geqslant \geqslant v(\{i\})$, т. е. вновь $z_i \geqslant v(\{i\})$. С другой стороны,

$$\sum_{i \in N} z_i = \sum_{i \in S} \left(y_i + \frac{\varepsilon}{|S|} \right) + \sum_{i \in N \setminus S} \left(v(\{i\}) + \frac{\alpha}{n - |S|} \right) = \\ = \sum_{i \in S} y_i + \varepsilon + \sum_{i \in N \setminus S} v(\{i\}) + \alpha = v(s) + \\ + \sum_{i \in N \setminus S} v(\{i\}) + \alpha = v(N).$$

Таким образом, z — дележ. При этом z, как видно из определения этого вектора, доминирует вектор y по коалиции S. Следовательно, $y \notin C(v)$.

Из этой теоремы вытекает, что ядро $C(v)$ представляет собой замкнутый многогранник.

В связи с этим возникает мысль использовать теорию линейного программирования для выяснения основных вопросов, связанных с понятием ядра.

Рассмотрим следующую задачу линейного программирования:

$$\min \sum_{i \in N} x_i$$

$$\sum_{i \in S} x_i \geqslant v(S)$$

для всех $S \subset N$, $S \neq N$. Здесь ограничений столько, сколько всех коалиций $S \subset N$. Имея в виду построить двойственную задачу, введем следующие обозначения. Двойственную переменную, соответствующую тому ограничению, которое касается коалиции S, обозначим p_S. Введем также векторы $\bar{S} \in \mathbf{R}^n$:

$$\bar{S}(i) = \begin{cases} 1, & i \in S, \\ 0, & i \notin S. \end{cases}$$

Другими словами, $\bar{S}$ — n-мерный вектор, у которого единицы стоят как раз на тех местах, номера которых совпадают с номерами участников коалиции S.

Вектор $\bar{S}$ будем называть *вектором инциденций коалиции* S. Обозначим через e^n n-мерный вектор $e^n = (1, 1, \ldots, 1)$. Тогда двойственная задача имеет вид

$$\max \sum_{S \in N} p_S v(S),$$

$$\sum_{S \in N} p_S \bar{S} = e^n, \quad p_S \geqslant 0 \quad \forall S \subset N.$$

У двойственной задачи ограничений всего n, в то время как у прямой их $n \times (2^n - 2)$. При этом, конечно, у двойственной задачи большее число переменных, чем у прямой.

Очевидно, прямая задача допустима. В то же время, ее линейная форма ограничена снизу на допустимом множестве, поскольку среди ограничений имеются неравенства вида $x_i \geqslant v(\{i\})$, $i \in N$. По теореме 3.1 получаем, что эта задача имеет решение. В таком случае имеет решение и двойственная задача. Обозначим общее значение прямой и двойственной задач через d. Нетрудно видеть, что если $d \leqslant v(N)$, то ядро $C(v)$ игры непусто. В самом деле, пусть x — решение прямой задачи. Рассмотрим вектор $\tilde{x} = \alpha x$, где $\alpha = \frac{v(N)}{d} \geqslant 1$.

Тогда

$$\sum_{i \in N} \tilde{x}_i = \alpha \sum_{i \in N} x_i = \alpha d = v(N).$$

Вместе с тем, поскольку x — допустимый вектор, то

$$\sum_{i \in S} \tilde{x}_i = \alpha \sum_{i \in S} x_i \geqslant \alpha v(S) \geqslant v(S).$$

Отсюда заключаем, что $\tilde{x} \in C(v)$. Наоборот, если $d > v(N)$, то для любого вектора x, удовлетворяющего неравенствам $\sum_{i \in S} x_i \geqslant v(S)$, имеет место неравенство $\sum_{i \in N} x_i \geqslant d > v(N)$, т. е. ядро $C(v)$ пусто.

Таким образом, для того чтобы ядро $C(v)$ было непусто, необходимо и достаточно, чтобы $d \leqslant v(N)$.

Из этих рассуждений вытекает следующее утверждение: для непустоты ядра $C(v)$ необходимо и достаточно, чтобы для любого набора чисел p_S, $S \subset N$, удовлетворяющего равенствам

$$\sum_{S \subset N} p_S \overline{S} = e^n, \quad p_S \geqslant 0, \; S \subset N, \tag{4.13}$$

выполнялось условие

$$\sum_{S \subset N} p_S v(S) \leqslant v(N). \tag{4.14}$$

Множество векторов $\{p_S, \; S \subset N\}$, удовлетворяющих уравнениям (4.13), является выпуклым многогранником (поскольку каждая координата p_S удовлетворяет ограничению $p_S \leqslant 1$). Поэтому достаточно требовать ограниченности линейной формы $\sum\limits_{S \subset N} p_S v(S)$ числом $v(N)$ лишь на крайних точках этого многогранника.

Приведенными рассуждениями доказана

Теорема 4.4. *Для непустоты ядра $C(v)$ необходимо и достаточно, чтобы для любой крайней точки многогранника* (4.13) *выполнялось условие* (4.14).

Значение этой теоремы состоит в том, что многогранник (4.13) не зависит от характеристической функции $v(S)$ игры. Это позволяет, вычислив раз и навсегда, например, с помощью симплекс-метода, крайние точки многогранника (4.13) (а их конечное число), совсем просто проверять факт существования ядра у произвольной кооперативной игры n лиц: для этого достаточно лишь проверить выполнение неравенства (4.14).

Отметим, что в принципе определить все крайние точки многогранника (4.13) сравнительно просто. Как следует из теоремы 2.18, для этого нужно только перебрать все невырожденные $n \times n$-подматрицы ограничений из (4.13). С другой стороны, при больших n, как мы знаем, число крайних точек многогранника (4.13) настолько велико, что практическое их вычисление невозможно. Однако простой вид ограничений (4.13), а также их инвариантность по отношению к перенумерованию переменных позволяют надеяться на то, что доказанная теорема окажется полезной при теоретическом исследовании кооперативных игр.

Покажем, как теорема 4.4 позволяет получить необходимое и дотаточное условие существования ядра у симметрической игры n лиц. Предварительно докажем общий факт.

Теорема 4.5. *Для существования ядра у кооперативной игры n лиц достаточно, чтобы характеристическая функция v удовлетворяла условию*

$$v(S) \leqslant \frac{|S|}{n} v(N)$$

для всех $S \subset N$.

Доказательство очевидно, так как ясно, что при данном условии дележ $\alpha = \left(\frac{v(N)}{n}, \frac{v(N)}{n}, \ldots, \frac{v(N)}{n}\right)$ принадлежит ядру, что следует из неравенства

$$\sum_{i \in S} \alpha_i = \frac{v(N)}{n} |S| \geqslant v(S).$$

Оказывается, что для симметричных игр условие теоремы 4.5 является и необходимым.

Теорема 4.6. *Для существования ядра у симметричной игры необходимо и достаточно, чтобы $v(S) \leqslant \leqslant \frac{|S|}{n} v(N)$ для всех $S \subset N$.*

Доказательство. Достаточность следует из предыдущей теоремы. Докажем необходимость. Пусть ядро игры непусто и S — произвольная коалиция, состоящая из m участников, т. е. $|S| = m < n$.

Лемма 4.4. *Существует n коалиций S_j, $j = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n$, таких, что каждая из них содержит по m участников и векторы $\bar{S}_j$ инциденций для этих коалиций обладают свойством*

$$\frac{1}{m} \sum_{j=1}^{n} \bar{S}_j = e^n.$$

Действительно, в качестве векторов $\bar{S}_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, можно взять векторы, i-я координата $\bar{S}_j(i)$ которых задается формулой

$$\bar{S}_j(i) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad 0 \leqslant i - j \leqslant m - 1; \\ 1, & \text{если} \quad i - j \leqslant -(n - m + 1); \\ 0 & \text{в противном случае}; \end{cases}$$

$$i = 1, 2, \ldots, n.$$

Проверку того, что данные векторы удовлетворяют условиям леммы, предоставляем читателю.

Рассмотрим вектор $\{p_S, S \subset N\}$, для которого $p_S = 1/m$, если при некотором j, $1 \leqslant j \leqslant n$, выполняется равенство $S = S_j$, и $p_S = 0$ в противном случае. Очевидно,

$$\sum_{S \subset N} p_S \bar{S} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{m} \bar{S}_j = e^n.$$

Таким образом, для нашего набора чисел выполняются условия (4.13). В силу предположения о непустоте ядра $C(v)$, отсюда следует неравенство (4.14), т. е. $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{m} v(\bar{S}_j) \leqslant v(N)$. Поскольку игра симметрична, то $v(\bar{S}_j) = v(S)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, и имеем $\frac{1}{m} nv(S) \leqslant v(N)$.

В качестве иллюстрации к теореме 4.4 выведем необходимое и достаточное условие существования ядра у произвольной игры трех лиц.

В этом случае $N = \{1, 2, 3\}$, а множество всех коалиций, не совпадающих с N, состоит из следующих шести элементов:

$$S_1 = \{1\}, \quad S_2 = \{2\}, \quad S_3 = \{3\}, \quad S_{12} = \{1, 2\},$$
$$S_{13} = \{1, 3\}, \quad S_{23} = \{2, 3\}.$$

Соответствующие векторы инциденций таковы:

$$\bar{S}_1 = (1, 0, 0), \quad \bar{S}_2 = (0, 1, 0), \quad \bar{S}_3 = (0, 0, 1),$$
$$\bar{S}_{12} = (1, 1, 0), \quad \bar{S}_{13} = (1, 0, 1), \quad \bar{S}_{23} = (0, 1, 1).$$

Многогранник (4.13) в данном случае задается условиями

$$p_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + p_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + p_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + p_{12} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + p_{13} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + p_{23} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$(p_1, p_2, p_3, p_{12}, p_{13}, p_{23}) \geqslant 0.$$

Необходимо определить все крайние точки многогранника. Теорема 2.16 утверждает, что для задания точки в n-мерном пространстве необходимо n линейно независимых уравнений. В нашем случае $n = 6$, поэтому к имеющимся трем уравнениям следует добавить еще три уравнения, возникающие из условия неотрицательности переменных. Другими словами, нужно из шести уравнений

$$p_1 = 0,\ p_2 = 0,\ p_3 = 0,\ p_{12} = 0,\ p_{13} = 0,\ p_{23} = 0$$

выбрать три. Поскольку подобный выбор можно сделать двадцатью различными способами $\left(C_6^3 = 20\right)$, то полный перебор довольно утомителен. Можно, однако, заметить, что многогранник (4.13) инвариантен относительно перенумерации неизвестных. Используя этот факт, можно ограничиться лишь следующими наборами уравнений:

$$1)\begin{cases} p_1 = 0, \\ p_2 = 0, \\ p_3 = 0; \end{cases} \quad 2)\begin{cases} p_1 = 0, \\ p_2 = 0, \\ p_{12} = 0; \end{cases} \quad 3)\begin{cases} p_1 = 0, \\ p_2 = 0, \\ p_{13} = 0; \end{cases}$$

$$4)\begin{cases} p_1 = 0, \\ p_{12} = 0, \\ p_{13} = 0; \end{cases} \quad 5)\begin{cases} p_{12} = 0, \\ p_{13} = 0, \\ p_{23} = 0. \end{cases}$$

Соответствующие решения этих систем уравнений имеют вид:

1) (0, 0, 0, 1/2, 1/2, 1/2);

2) (0, 0, −1, 0, 1, 1) — не принадлежит многограннику;

3) (0, 0, 1, 1, 0, 0);

4) в этом случае матрица вырождена;

5) (1, 1, 1, 0, 0, 0).

Таким образом, получаем три крайних точки многогранника (4.13):

$$(0, 0, 0, 1/2, 1/2, 1/2), \quad (0, 0, 1, 1, 0, 0), \quad (1, 1, 1, 0, 0, 0).$$

Все остальные крайние точки получаются из данных путем перенумерации переменных. Таких точек будет еще две:

$$(0, 1, 0, 0, 1, 0), \quad (1, 0, 0, 0, 0, 1).$$

Из теоремы 4.4 получаем, что необходимые и достаточные условия существования ядра у игры трех лиц имеют вид

$$\frac{1}{2}\left(v(S_{12}) + v(S_{13}) + v(S_{23})\right) \leqslant v(N),$$

$$v(S_i) + v(S_{jk}) \leqslant v(N),\ i \neq j,\ i \neq k,\ j \neq k,$$

$$v(S_1) + v(S_2) + v(S_3) \leqslant v(N).$$

Заметим, что существенным является лишь первое условие, поскольку остальные два всегда выполняются вследствие условия (4.12), наложенного на характеристическую функцию игры.

Окончательный вывод таков: *для того чтобы игра трех лиц имела непустое ядро, необходимо и достаточно выполнения неравенства* $v(S_{12}) + v(S_{13}) + v(S_{23}) \leqslant 2v(N)$.

§ 3. Свойства неотрицательных матриц

При моделировании многих экономических, социальных и физических процессов составной частью линейной модели часто оказываются матрицы с неотрицательными элементами. Примерами могут служить некоторые из моделей гл. I. При исследовании моделей подобного рода весьма полезными оказываются специфические свойства квадратных матриц с неотрицательными элементами. Так, при описании качественных особенностей оптимальных траекторий в динамической модели Леонтьева эти свойства неотрицательных матриц играют решающую роль (см. § 5 настоящей главы). В данном параграфе средствами линейного программирования мы докажем одно из важнейших свойств неотрицательных матриц, заключающееся в наличии у них действительного неотрицательного собственного числа и неотрицательного собственного вектора, соответствующего этому числу.

Всюду в этом параграфе буквой A обозначается квадратная $n \times n$-матрица с неотрицательными элементами:

$$A = (a_{ij}),\ a_{ij} \geqslant 0, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

В дальнейшем важную роль будет играть понятие неразложимой матрицы. Обозначим $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ — множество натуральных чисел от 1 до n.

Определение 4.11. Пусть S — подмножество множества N. Говорят, что множество S *изолировано* (относительно данной матрицы A), если в матрице A $a_{ij} = 0$ при $j \in S$, $i \in N \setminus S$.

На языке модели Леонтьева изолированность множества S означает, что отрасли с номерами $j \in S$ при своем функционировании не используют товары, производимые отраслями с номерами из множества $N \setminus S$. Если перенумеровать индексы так, чтобы $S = \{1, 2, \ldots, k\}$, $N \setminus S = \{k+1, \ldots, n\}$, что соответствует одновременной перестановке строк и столбцов матрицы A, то матрица A примет вид

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}, \tag{4.15}$$

где A_1 и A_3 — квадратные подматрицы размеров $k \times k$ и $(n-k) \times (n-k)$ соответственно.

Определение 4.12. Матрица A называется *неразложимой*, если в множестве N нет изолированных подмножеств, кроме самого N и пустого множества.

Другими словами, матрица A неразложима, если одновременной перестановкой строк и столбцов ее нельзя привести к виду (4.15).

Понятие неразложимости матрицы имеет интересную экономическую интерпретацию. Именно, неразложимость матрицы A в модели Леонтьева означает, что каждая отрасль использует, хотя бы косвенно, продукцию всех отраслей. Точная формулировка этого факта составляет содержание задачи 8.

Лемма 4.5. *Пусть A — неразложимая матрица, $x \in \mathbf{R}^n$, $x \geqslant 0$, $x \neq 0$. Пусть, кроме того, у вектора x имеются нулевые координаты и $S = \{j \mid x_j = 0\}$. Тогда у вектора $y = Ax$ найдется положительная координата $y_i > 0$, причем $i \in S$.*

Доказательство. Обозначим $T = \{i \mid y_i > 0\}$. Нужно показать, что $S \cap T \neq \varnothing$. Допустим противное: $S \cap T = \varnothing$. Тогда $S \subseteq N \setminus T$. Покажем, что $N \setminus S$ — изолированное подмножество. Пусть $j \in N \setminus S$, $i \in S$. Из того, что $i \in S \subseteq N \setminus T$, следует $y_i = 0$. Тогда

$$0 = y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \sum_{j \in N \setminus S} a_{ij} x_j.$$

Так как при $j \in N \setminus S$ имеем $x_j \geqslant 0$, то из предыдущего равенства (и условия $a_{ij} \geqslant 0$) получаем, что $a_{ij} = 0$ при $j \in N \setminus S$, $i \in S$. Однако по предположению матрица A неразложима, следовательно, в N нет изолированных подмножеств. Полученное противоречие доказывает лемму.

Следствие. *Если матрица A неразложима, $x \geqslant 0$, $x \neq 0$, то из равенства $Ax \leqslant \alpha x$* следует, что $\alpha > 0$, $x > 0$.

Действительно, поскольку $Ax \geqslant 0$, $Ax \neq 0$, то $\alpha > 0$. Допустим теперь, что множество $S = \{j \mid x_j = 0\}$ непусто.

По лемме найдется такой индекс $j \in S$, что $(Ax)_j > 0$. Но тогда неравенство $(Ax)_j \leqslant \alpha x_j$ невозможно, так как $x_j = 0$.

Теорема Фробениуса — Перрона. *Неразложимая матрица A имеет собственное число $\lambda_A > 0$, при этом модуль любого собственного числа матрицы λ (действительного или комплексного) не превосходит λ_A.*

Числу λ_A отвечает единственный (с точностью до скалярного множителя) собственный вектор x_A, все координаты которого ненулевые и одного знака (т. е. можно считать $x_A > 0$).

Доказательство. Обозначим $e = (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbf{R}^n$. Рассмотрим задачу линейного программирования

$$\begin{gathered} \min u \\ (A - \lambda I)x - ue \leqslant 0, \quad \langle x, e \rangle = 1, \quad x \geqslant 0. \end{gathered} \tag{4.16}$$

Здесь вектор переменных имеет вид $(x, u) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, u)$. Число λ фиксировано и является параметром.

Множество $\overline{X}$ векторов $x \in \mathbf{R}^n$, удовлетворяющих условиям $x \geqslant 0$, $\langle x, e \rangle = 1$, ограничено. Следовательно, ограничено и множество всех векторов вида $(A - \lambda I)x$ при любом фиксированном λ, когда $x \in \overline{X}$. Пусть $\tilde{X} = \{y \mid y = (A - \lambda I)x,\ x \in \overline{X}\}$. Тогда число u в задаче (4.16) определяется условием

$$u = \min_{y \in \tilde{X}} \max_{1 \leqslant j \leqslant n} y_j.$$

Из ограниченности и замкнутости множества $\tilde{X}$ вытекает конечность числа u. Этим показано, что задача (4.16) имеет решение $(x(\lambda), u(\lambda))$ при любом значении параметра λ.

Из общих фактов о свойствах параметрических задач линейного программирования, изложенных в гл. VIII, вытекает непрерывность функции $u(\lambda)$. В данном случае, впрочем, это легко увидеть и непосредственно. В самом деле, функция $\sum_{j=1}^{n} (a_{ij}x_j - \lambda x_i)$ непрерывна по аргументам $x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda$. Тогда $\varphi(x, \lambda) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} (a_{ij}x_j - \lambda x_i)$ также непрерывна. Покажем, что для любой непрерывной функции $\varphi(x, \lambda)$ функция $u(\lambda) = \min_{x \in \overline{X}} \varphi(x, \lambda)$ непрерывна при условии, что $\overline{X}$ — компакт. Действительно, пусть

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_k = \lambda_0, \quad \varphi(x^k, \lambda_k) = \min_{x\in\overline{X}} \varphi(x, \lambda_k),$$

$$x^k \in \overline{X}, k = 1, 2, \ldots$$

Поскольку $\overline{X}$ — компакт, последовательность $\{x^k\}$ можно считать сходящейся. Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} x^k = x^0$. Тогда, переходя к пределу в неравенствах $\varphi(x^k, \lambda_k) \leqslant \varphi(x, \lambda_k)$, из непрерывности функции φ получаем, что $\varphi(x^0, \lambda_0) \leqslant \leqslant \varphi(x, \lambda_0)$ при всех $x \in \overline{X}$. Но это означает, что $u(\lambda_0) = = \varphi(x^0, \lambda_0)$, т. е.

$$\lim_{k\to\infty} u(\lambda_k) = \lim_{k\to\infty} \varphi(x^k, \lambda_k) = \varphi(x^0, \lambda_0) = u(\lambda_0).$$

Таким образом, доказана непрерывность функции $u(\lambda)$ значений задачи (4.16).

Очевидно, что $\varphi(x, \lambda) \to -\infty$ при $\lambda \to +\infty$ и $\varphi(x, \lambda) \to \to +\infty$ при $\lambda \to -\infty$, при каждом фиксированном $x \in \overline{X}$. Из ограниченности $\overline{X}$ вытекает, что это же верно и для функции $u(\lambda)$. Итак,

1) $u(\lambda)$ непрерывна;
2) $u(\lambda) \to -\infty$ при $\lambda \to +\infty$;
3) $u(\lambda) \to +\infty$ при $\lambda \to -\infty$.

Из свойств 1)—3) следует, что существует такое число λ_A, что $u(\lambda_A) = 0$. Обозначим вектор, являющийся решением задачи (4.16) при $\lambda = \lambda_A$, через x_A. Тогда

$$Ax_A \leqslant \lambda_A x_A, \quad x_A \geqslant 0, \quad \langle x_A, e\rangle = 1. \tag{4.17}$$

Рассмотрим задачу, двойственную к задаче (4.16):

$$\begin{gathered} \max v \\ (A - \lambda I)'p + ve \geqslant 0, \quad \langle p, e\rangle = 1, \quad p \geqslant 0. \end{gathered} \tag{4.18}$$

Из теоремы двойственности получаем, что при $\lambda = \lambda_A$ значение задачи (4.18) также равно 0.

Обозначим вектор, являющийся решением задачи (4.18) при $\lambda = \lambda_A$, через p_A. Тогда $A'p_A \geqslant \lambda_A p_A$. Применяя к неравенству (4.17) следствие из леммы 4.5, получаем, что $\lambda_A > 0$, $x_A > 0$. По теореме равновесия из последнего строгого неравенства следует, что $A'p_A = \lambda_A p_A$. Вновь привлекая следствие из леммы 4.5, имеем $p_A > 0$. По теореме равновесия $Ax_A = \lambda_A x_A$. (Заметим, что мы считали очевидным, что матрица A' неразложима вместе с матрицей A; см. упражнение 4.)

Для доказательства теоремы нужно убедиться в том, что собственный вектор x_A, соответствующий числу λ_A,— единственный с точностью до скалярного множителя.

Пусть x'_A — такой вектор, что $Ax'_A = \lambda_A x'_A$ и пара векторов x_A, x'_A линейно независима. Тогда можно подобрать такие числа α, β, что вектор $\tilde{x} = \alpha x_A + \beta x'_A$ имеет хотя бы одну нулевую координату и в то же время $\tilde{x} \neq 0$. Вектор $\tilde{x}$ также является собственным, так как $A\tilde{x} = \alpha A x_A + \beta A x'_A = \lambda_A (\alpha x_A + \beta x'_A) = \lambda_A \tilde{x}$. Из равенства $A\tilde{x} = \lambda_A \tilde{x}$ следует, что

$$A|\tilde{x}| \geqslant \lambda_A |\tilde{x}|, \tag{4.19}$$

где $|\tilde{x}| = (|\tilde{x}_1|, |\tilde{x}_2|, \ldots, |\tilde{x}_n|)$. Чтобы получить (4.19), нужно лишь воспользоваться тем, что модуль суммы чисел не больше суммы их модулей: так как $(A\tilde{x})_i = \lambda_A \tilde{x}_i$, то $|(A\tilde{x})_i| = \lambda_A |\tilde{x}_i|$; значит,

$$|(A\tilde{x})_i| = \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\tilde{x}_j \right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{ij} |\tilde{x}_j| = (A|\tilde{x}|)_i.$$

Допустим, что в (4.19) хотя бы в одной координате имеет место строгое неравенство. В таком случае, умножая неравенство (4.19) скалярно на положительный вектор p_A, получим строгое неравенство $\langle A|\tilde{x}|, p_A\rangle > \lambda_A \langle |\tilde{x}|, p_A\rangle$.

Заметим, что $\langle A|\tilde{x}|, p_A\rangle = \langle |\tilde{x}|, A'p_A\rangle = \lambda_A \langle |\tilde{x}|, p_A\rangle$. Тогда $\lambda_A \langle |\tilde{x}|, p_A\rangle > \lambda_A \langle |\tilde{x}|, p_A\rangle$, что невозможно. Следовательно, $A|\tilde{x}| = \lambda_A |\tilde{x}|$. Из следствия к лемме 4.5 получаем $|\tilde{x}| > 0$, что противоречит определению вектора $\tilde{x}$. Таким образом, собственный вектор x_A — единственный.

Пусть теперь λ — произвольное число матрицы A (действительное или комплексное), z — соответствующий собственный вектор. Из равенства $Az = \lambda z$ следует, что

$$A|z| \geqslant |\lambda|\, |z|, \tag{4.20}$$

где $|z| = (|z_1|, |z_2|, \ldots, |z_n|)$. Скалярно умножая неравенство (4.20) на вектор $p_A > 0$, получаем

$$\langle A|z|, p_A\rangle \geqslant |\lambda| \langle |z|, p_A\rangle,$$

откуда $\lambda_A \langle |z|, p_A\rangle \geqslant |\lambda| \langle |z|, p_A\rangle$, т. е. $\lambda_A \geqslant |\lambda|$ (с учетом того, что $\langle |z|, p_A\rangle > 0$). Теорема полностью доказана.

Нетрудно получить аналог теоремы Фробениуса — Перрона для произвольных (необязательно неразложимых) неотрицательных матриц.

Теорема 4.7. *Неотрицательная матрица A имеет неотрицательное собственное число $\lambda_A \geqslant 0$, причем $\lambda_A \geqslant |\lambda|$ для любого собственного числа λ матрицы A. Кроме того, существует неотрицательный собственный вектор $x_A \geqslant 0$, соответствующий числу λ_A.*

Доказательство проведем индукцией по порядку матрицы A. Для случая $n = 1$ утверждение теоремы тривиально выполняется. Пусть $n > 1$. Если матрица A неразложима, то теорема 4.7 следует из теоремы Фробениуса — Перрона. Если A имеет вид (4.15), то матрицы A_1 и A_3 имеют порядок, меньший n, и к ним применимо индуктивное предположение. Пусть $\lambda_{A_1}, \lambda_{A_3}$ — собственные числа Фробениуса матриц A_1 и A_3 соответственно, а векторы $x_{A_1} \in \mathbf{R}^k$ и $x_{A_3} \in \mathbf{R}^{n-k}$ — собственные. Предположим, что $\lambda_{A_1} \geqslant \lambda_{A_3}$. Положим $\lambda_A = \lambda_{A_1}$, $x_A = (x_{A_1}, 0)$, где 0 обозначает $(n-k)$-мерный нулевой вектор. Конец доказательства предоставляем провести читателю.

Собственные векторы x_A и p_A матриц A и A' соответственно, а также число λ_A, существование которых утверждается теоремами этого параграфа, будем называть *фробениусовыми*.

§ 4. Эффект замещения в обобщенной модели Леонтьева

Рассмотрим обобщенную модель Леонтьева, как она описана в п. 5 § 2 гл. I. Напомним, что технология этой модели задается парой матриц $(\widehat{A}, \widehat{I})$, размеров $n \times m$, где n — количество наименований товаров (продуктов), m — число отраслей, производящих эти товары. При этом все отрасли можно разбить по группам так, что в группе с номером k собраны все отрасли, выпускающие продукт с номером k, $k = 1, 2, \ldots, n$. Формально это записывается следующим образом. Пусть $M = \{1, 2, \ldots, m\}$, $M = \bigcup\limits_{k=1}^{n} M_k$, $M_k \cap M_{k'} = \varnothing$ при $k \neq k'$.

То, что $j \in M_k$, означает, что отрасль (технологический процесс) с номером j выпускает k-й продукт.

Столбец $a^j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj})$ матрицы $\widehat{A}$ описывает затраты каждого продукта $i = 1, 2, \ldots, n$ на производство единицы продукции отрасли j. Соответственно столбец $e^j = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ матрицы I, где число 1 стоит на месте j-й координаты, описывает структуру выпуска отрасли j.

Для сокращения записи введем следующие обозначения. Пусть $\sigma = \{j_1, j_2, \ldots, j_n\}$, где $j_k \in M_k$, $k = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n$,— некоторое подмножество множества индексов M, соответствующее выбору из каждой группы M_k одной отрасли.

Обозначим через $\widehat{A}_\sigma$ матрицу, составленную из всех столбцов матрицы $\widehat{A}$ с номерами из множества σ. Аналогично введем обозначение $\widehat{I}_\sigma$. Матрицы $\widehat{A}_\sigma$ и $\widehat{I}_\sigma$ являются квадратными $n \times n$-матрицами, при этом $\widehat{I}_\sigma$ — единичная, так что матрица A_σ задает обычную модель Леонтьева. Матрицу $\widehat{A}_\sigma$ назовем *подмоделью обобщенной модели Леонтьева*.

Обобщенная модель Леонтьева $(\widehat{A}, \widehat{I})$ называется *продуктивной*, если для всякого неотрицательного вектора $c \in \mathbf{R}^n_+$ существует неотрицательное решение $x \in \mathbf{R}^m_+$ системы неравенств $\widehat{I}x - \widehat{A}x \geqslant c$, $x \geqslant 0$. Другими словами, модель $(\widehat{A}, \widehat{I})$ продуктивна, если в ней может быть удовлетворен любой конечный спрос.

Введем также следующее обозначение: для любого вектора $x \in \mathbf{R}^m_+$ через x_σ обозначим вектор $x_\sigma = (x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots$ $\ldots, x_{j_n}) \in \mathbf{R}^n_+$. Обозначив $\tilde{A} = \widehat{I} - \widehat{A}$, сформулируем задачу (см. (1.12)) удовлетворения конечного спроса при минимальных трудовых затратах:

$$\begin{gathered} \min \langle l, x \rangle \\ \tilde{A}x \geqslant c, \quad x \geqslant 0, \end{gathered} \tag{4.21}$$

где $l = (l_1, l_2, \ldots, l_m)$, причем l_i обозначает трудовые затраты при единичной интенсивности работы отрасли с номером i.

Теорема о замещении (П. Самуэльсон). *Существует подмодель $\widehat{A}_\sigma$ обобщенной модели Леонтьева $(\widehat{A}, \widehat{I})$ такая, что среди решений задачи* (4.21) *для произвольного конечного спроса $c > 0$ найдется вектор $\hat{x}$, для которого $\hat{x}_i = 0$, если $i \notin \sigma$, и $\hat{x}_i > 0$ при $i \in \sigma$.*

Доказательство этой теоремы будет вытекать из ряда лемм, относящихся к теории линейного программирования.

Рассмотрим задачу, двойственную к (4.21):

$$\begin{gathered}\max \langle c, y\rangle \\ \tilde{A}'y \leqslant l, \quad y \geqslant 0.\end{gathered} \tag{4.22}$$

Если интерпретировать двойственные переменные y как цены на товары, считая при этом, что заработная плата одного рабочего принята за 1, то получим, что (4.22) описывает задачу максимизации стоимости выпущенной продукции (чистого выпуска) при условии бесприбыльности производства.

Задачи (4.21) и (4.22) являются допустимыми. В самом деле, допустимость задачи (4.21) является следствием предположения о продуктивности обобщенной модели, а в задаче (4.22) нетрудно указать допустимый вектор в явном виде: $y = 0$.

По теореме двойственности обе задачи (4.21) и (4.22) имеют решение. Пусть $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ — векторы, являющиеся решениями этих задач соответственно. Обозначим $c = \tilde{A}\tilde{x} \geqslant c > 0$.

Назовем решение x задачи (4.21) *опорным*, если вектор x имеет не более чем n положительных координат.

Лемма 4.6. *Задача* (4.21) *обладает опорным решением.*

Эта лемма совпадает с леммой 2.1.

Лемма 4.7. *Структура опорного решения* $\tilde{x}$ *задачи* (4.21) *имеет следующий вид: существует набор индексов* $\sigma = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$, *где* $i_k \in M_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, *такой, что* $\tilde{x}_i > 0$, $i \in \sigma$, *и* $\tilde{x}_i = 0$, *если* $i \notin \sigma$.

Доказательство. Утверждение леммы вытекает из определения опорного решения и структуры матрицы $\tilde{A}$. Действительно, поскольку $\tilde{A} = \hat{I} - A$, то $\hat{I}\tilde{x} - \hat{A}\tilde{x} \geqslant c > 0$. Учитывая, что

$$(\hat{I}\tilde{x})_k = \sum_{i \in M_k} \tilde{x}_i > 0,$$

получаем, что для всякого k, $k = 1, 2, \ldots, n$, существует индекс i_k, $i_k \in M_k$, такой, что $\tilde{x}_{i_k} > 0$. Так как в базисном решении не может быть более чем n положительных компонент, окончательно приходим к тому, что $\tilde{x}_i = 0$, если $i \notin \sigma = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$.

Лемма 4.8. *Пусть* $c' \geqslant 0$ — *произвольный вектор конечного спроса. Рассмотрим задачу* (4.21), *где в качестве вектора* c *фигурирует* c'. *Тогда среди решений этой задачи существует вектор* x', *структура которого такая же, как у опорного решения* $\tilde{x}$, *т. е.* $x'_i > 0$, $i \in \sigma$, *и* $x'_i = 0$, $i \notin \sigma$, *где* σ — *набор индексов, существование которого утверждается в лемме* 4.7.

Доказательство. Рассмотрим модель Леонтьева, соответствующую строкам матрицы $\tilde{A}$ с номерами из множества σ. Пусть $\tilde{A}_\sigma$ — соответствующая квадратная $n \times n$-матрица. Тогда существует вектор $\tilde{x}_\sigma$ такой, что $\tilde{A}_\sigma \tilde{x}_\sigma = c > 0$. Следовательно, модель $\tilde{A}_\sigma$ продуктивна. Поэтому существует вектор $x'_\sigma \geqslant 0$ такой, что $\tilde{A}_\sigma x'_\sigma = c'$. Построим m-мерный вектор x', положив $x'_i = (x'_\sigma)_i$, если $i \in \sigma$, и $x'_i = 0$, если $i \notin \sigma$. Ясно, что $x' \geqslant 0$, $\tilde{A}x' = c'$. Следовательно, вектор x' допустим для нашей задачи. Покажем его оптимальность.

Рассмотрим вектор $\tilde{y}$, являющийся решением задачи (4.22). Этот вектор является допустимым и в том случае, когда в (4.32) вектор c замещен вектором c'. Поскольку векторы $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ являются оптимальными для соответствующих задач, то по теореме равновесия выполняются следующие утверждения:

$$\tilde{y}_j > 0 \Rightarrow (\tilde{A}\tilde{x})_j = c_j, \quad \tilde{x}_i > 0 \Rightarrow (\tilde{A}'\tilde{y})_i = l_i.$$

Рассмотрим пару векторов $(x', \tilde{y})$. Каждый из них допустим для задач (4.21), (4.22) соответственно при $c = c'$. Вместе с тем, так как $\tilde{A}x' = \tilde{c} = \tilde{A}\tilde{x}$ и нули у векторов x' и $\tilde{x}$ располагаются на одних и тех же координатах, то выполняются аналогичные импликации:

$$\tilde{y}_j > 0 \Rightarrow (\tilde{A}x')_j = c_j, \quad x'_i > 0 \Rightarrow (\tilde{A}'\tilde{y})_i = l_i.$$

Вновь пользуясь теоремой равновесия, получаем, что вектор x' является решением задачи.

Из лемм 4.6—4.8 непосредственно вытекает доказательство теоремы о замещении.

Таким образом, при необходимости экономить трудовые ресурсы каждая отрасль может использовать постоянно один и тот же из возможных технологических процессов при производстве любого вектора конечного спроса.

Возникает вопрос: чем набор способов, отвечающий множеству индексов σ в теореме Самуэльсона, отличается от остальных?

Для ответа на этот вопрос введем понятие вектора полных трудовых затрат. Пусть A_σ — модель Леонтьева. В том случае, когда модель продуктивна, можно показать, что матрица $I-A_\sigma$ невырождена. При этом решение уравнения $(I-A_\sigma)x_\sigma=c$ можно записать в виде $x_\sigma = (I-A_\sigma)^{-1}c$. Тогда трудовые затраты выразятся числом

$$\langle l_\sigma, x_\sigma\rangle = \langle l_\sigma, (I-A_\sigma)^{-1}c\rangle = \langle (I-A'_\sigma)^{-1} l_\sigma, c\rangle,$$

где (напоминаем) A'_σ — матрица, транспонированная к A_σ. В связи с этим вектор $l^*_\sigma = (I-A'_\sigma)^{-1} l_\sigma$ называют *вектором полных трудовых затрат модели* (A_σ, l_σ).

Пусть σ^1 — произвольный набор индексов $\sigma^1 = \{i^1_1, i^1_2, \ldots, i^1_n\}$, так что $i^1_k \in M_k$, $k=1, 2, \ldots, n$. Тогда этот набор задает модель Леонтьева $\widetilde{A}_{\sigma^1} = I - \widehat{A}_{\sigma^1}$ и соответствующий вектор прямых трудовых затрат l_{σ^1}. Если подмодель $\widehat{A}_{\sigma^1}$ продуктивна, обозначим через $l^*_{\sigma^1}$ вектор ее полных трудовых затрат $l^*_{\sigma^1} = \left(I - \widehat{A}'_{\sigma^1}\right)^{-1} l_{\sigma^1}$.

Теорема 4.8.

$$l^*_\sigma \leqslant l^*_{\sigma^1}.$$

Доказательство. Рассмотрим следующие задачи:

$$\begin{gathered}\min\langle l_\sigma, x_\sigma\rangle \\ x_\sigma - \widehat{A}_\sigma x_\sigma \geqslant c, \quad x_\sigma \geqslant 0;\end{gathered} \tag{4.23}$$

$$\begin{gathered}\min\langle l_{\sigma^1}, x_{\sigma^1}\rangle \\ x_{\sigma^1} - \widehat{A}_{\sigma^1} x_{\sigma^1} \geqslant c, \quad x_{\sigma^1} \geqslant 0.\end{gathered} \tag{4.24}$$

Задача, двойственная к (4.23), имеет вид

$$\begin{gathered}\max\langle c, y\rangle \\ \left(I - \widehat{A}'_\sigma\right) y \leqslant l_\sigma, \quad y \geqslant 0.\end{gathered} \tag{4.25}$$

Так как $c>0$, то, как мы уже видели, $x_\sigma>0$. По теореме равновесия отсюда вытекает, что если y_σ — решение задачи (4.25), то $\left(I-\widehat{A}'_\sigma\right) y_\sigma = l_\sigma$, т. е. $l^*_\sigma = \left(I-\widehat{A}'_\sigma\right)^{-1} l_\sigma = y_\sigma$. Точно так же для решения задачи, двойственной к (4.24), имеем

$$l^*_{\sigma^1} = \left(I - \widehat{A}'_{\sigma^1}\right)^{-1} l_{\sigma^1} = y_{\sigma^1}.$$

С другой стороны, по теореме двойственности $\langle c, y_{\sigma 1}\rangle = \langle l_{\sigma 1}, x_{\sigma 1}\rangle$, $\langle c, y_\sigma\rangle = \langle l_\sigma, x_\sigma\rangle$, где $x_\sigma, x_{\sigma 1}$ — решения задач (4.23), (4.24) соответственно.

Учитывая, что при любом векторе конечного спроса $c > 0$ имеет место неравенство $\langle x_\sigma, l_\sigma\rangle \leqslant \langle x_{\sigma 1}, l_{\sigma 1}\rangle$, получаем $\langle c, y_\sigma\rangle \leqslant \langle c, y_{\sigma 1}\rangle$ или $\langle c, l^*_\sigma\rangle \leqslant \langle c, l^*_{\sigma 1}\rangle$. Из произвольности вектора $c > 0$ заключаем, что $l^*_\sigma \leqslant l^*_{\sigma 1}$.

Таким образом, мы получили следующую характеристику подмодели $\widehat{A}_\sigma$: вектор полных трудовых затрат l^*_σ этой подмодели по всем координатам не больше вектора полных трудовых затрат любой другой продуктивной подмодели.

§ 5. Теорема о магистрали для динамической модели планирования

Рассмотрим динамическую модель леонтьевского типа, описанную в § 2 гл. I. Напомним ее математическую формулировку (см. (1.10)):

$$\max \langle c, x^T\rangle$$

$$Ax^1 \leqslant x^0,\ Ax^{t+1} \leqslant x^t,\ t = 1, 2, \ldots, T-1, \quad (4.26)$$

$$x^t \geqslant 0,\ t = 1, 2, \ldots, T.$$

Основная трудность при решении задачи (4.26) связана с большой размерностью этой задачи. В зависимости от степени подробности описания общественного производства межотраслевой баланс может включать в себя до нескольких сотен отраслей. Если при этом период планирования составляет несколько лет, а за единицу времени принимается, скажем, месяц или квартал, то размерность задачи линейного программирования (4.26) настолько велика, что ее точное решение не под силу даже самым современным ЭВМ. В связи с этим особый интерес представляют качественные результаты относительно поведения оптимальных динамических траекторий. Для изложения одного из самых интересных фактов в этой области нам потребуются свойства неотрицательных матриц, полученные в § 3. Кроме того, нам придется воспользоваться еще одним важным свойством квадратных неотрицательных матриц, однако его полное доказательство здесь мы не приводим, поскольку оно увело бы нас в сторону от линейного программирования.

Рассмотрим сначала технологическую матрицу A модели Леонтьева. Допустим, что эта матрица устроена следующим образом: все n отраслей разбиты на m групп Γ_0, $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{m-1}$. При этом сырьем для отраслей из группы Γ_0 служат только товары, производимые отраслями из группы Γ_1, сырьем для отраслей из Γ_1 служат товары отраслей из Γ_2 и т. д. Сырьем для отраслей из группы Γ_{m-1} служат товары, производимые в группе Γ_0. Если считать, что группа Γ_0 содержит отрасли с номерами $1, 2, \ldots, k_1$, группа Γ_1 — отрасли с номерами $k_1+1, k_1+2, \ldots, k_2$ и т. д., то матрица A, обладающая описанным свойством, выглядит следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & A_{m-1} \\ A_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & A_{m-2} & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.27}$$

Определение 4.13. Неразложимая матрица $A \geqslant 0$ называется *импримитивной*, если множество $N = \{1, 2, \ldots \ldots, n\}$ можно так разбить на m непересекающихся подмножеств $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_{m-1}$, что если $a_{ij} > 0$, $i \in \Gamma_r$, то при $r \leqslant m-2$ обязательно $j \in \Gamma_{r+1}$, а при $r = m-1$ обязательно $j \in \Gamma_0$.

После очевидной перенумерации отраслей, что соответствует одновременной перестановке строк и столбцов, импримитивную матрицу можно привести к виду (4.27).

Остальные неразложимые матрицы называются *примитивными*. Кажется очевидным, что любая матрица A, описывающая реальные межотраслевые связи, будет примитивной.

Далее в этом параграфе приняты следующие обозначения:

x_A — вектор Фробениуса матрицы A;

p_A — вектор Фробениуса матрицы A';

λ_A — число Фробениуса матриц A и A',

так что $Ax_A = \lambda_A x_A$, $A'p_A = \lambda_A p_A$.

Для примитивных матриц имеет место следующий замечательный факт.

Эргодическая теорема. *Пусть A — примитивная матрица, x — произвольный неотрицательный n-мер-*

ный вектор. Тогда

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{\lambda_A}A\right)^t x=\mu x_A,$$

где

$$\mu=\frac{\langle x,\ p_A\rangle}{\langle x_A,\ p_A\rangle}.$$

Доказательство этой теоремы см. в [26]. Ее название пришло из теории вероятностей. Основное ее содержание состоит в том, что последовательность $\left(\frac{1}{\lambda_A}A\right)^t x,\quad t=1, 2, \ldots,$ сходится при произвольном векторе $x\in\mathbf{R}^n_+$.

Определение 4.14. Пусть $\bar{x}\in\mathbf{R}^n$, $\varepsilon>0$ — произвольное число. Назовем *конической ε-окрестностью вектора $\bar{x}$* множество

$$C_\varepsilon(\bar{x})=\{x\mid x\in\mathbf{R}^n,\quad \exists\lambda>0:\|\lambda x-\bar{x}\|<\varepsilon\}.$$

Иллюстрацией этого определения служит рис. 4.1. Переформулируем эргодическую теорему с использованием понятия конической ε-окрестности.

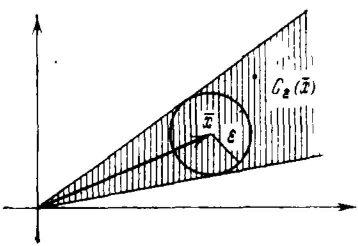

Рис. 4.1.

Теорема 4.9. *Пусть матрица A примитивна, x — произвольный неотрицательный вектор. Тогда для любого $\varepsilon>0$ найдется такое натуральное число $T(\varepsilon,\ x)$, что при $t>T(\varepsilon,\ x)$ вектор $x_t=A^t x$ принадлежит конической ε-окрестности $C_\varepsilon(x_A)$ вектора Фробениуса x_A.*

Теперь сформулируем основной факт о свойствах оптимальных решений задачи (4.26).

Теорема о магистрали. *Пусть матрица A примитивна, начальный запас x^0 положителен, $c\geqslant 0$, $c\neq 0$. Для любого $\varepsilon>0$ существуют такие числа $T_1(\varepsilon)$, $T_2(\varepsilon)$, что если промежуток планирования T достаточно велик, именно, $T>T_1(\varepsilon)+T_2(\varepsilon)$, то при всех t, $T_1(\varepsilon)\leqslant t\leqslant T-T_2(\varepsilon)$, имеет место $\tilde{x}_t\in C_\varepsilon(x_A)$ для любой оптимальной траектории $\{\tilde{x}_t\}$ задачи (4.26).*

Прежде чем приступить к доказательству этого утверждения, поясним его содержательный смысл. Теорема о магистрали утверждает, что если промежуток планирования достаточно велик, то в течение всех периодов с номерами t, где $T_1(\varepsilon) \leqslant t \leqslant T - T_2(\varepsilon)$, все оптимальные траектории задачи (4.26) обладают таким свойством: направление вектора интенсивностей $\tilde{x}_t$ мало отличается от направления вектора x_A. Отметим, что число таких «хороших» периодов растет с ростом промежутка планирования T, так как числа $T_1(\varepsilon)$, $T_2(\varepsilon)$ от T не зависят. Отсюда следует, что даже если не удалось вычислить оптимальную траекторию $\{\tilde{x}_t\}$, но векторы выбирать x_t таким образом, чтобы величина

$$\left\| \frac{x_t}{\|x_t\|} - \frac{x_A}{\|x_A\|} \right\|$$

была по возможности меньше, то мы не слишком много потеряем по сравнению с оптимальным планом. Эта рекомендация не зависит от вектора начальных запасов x^0 и от целевого функционала $\langle c, x\rangle$. В связи с этим приведем образное сравнение для выводов теоремы, принадлежащее американским авторам Дорфману, Самуэльсону и Солоу [22], открывшим этот эффект.

Допустим, что некто хочет проехать по большому городу с интенсивным движением из пункта A в пункт B. Если пункты A и B расположены недалеко друг от друга, то, скорее всего, самый быстрый путь — это ехать по наикратчайшему пути. Однако, если расстояние между A и B значительно, то самый быстрый путь чаще всего оказывается таким: надо из пункта A выехать на одну из больших городских магистралей, где средняя скорость движения велика, не смущаясь тем, что при этом, возможно, придется несколько отклониться от цели, и по этой магистрали приблизиться насколько возможно к пункту B и затем только с нее свернуть.

Приступим к доказательству теоремы о магистрали. Построим задачу, двойственную к (4.26).

Вектор переменных задачи (4.26) имеет размерность $n \times T$ и его можно записать в виде $x = (x^1, x^2, \ldots, x^T)$, где каждый вектор x^t в свою очередь есть n-мерный вектор. Вектор правой части ограничений имеет вид $b = (x^0, 0, \ldots, 0)$, а вектор коэффициентов целевого функционала равен $c^* = (0, 0, \ldots, c)$; здесь 0 обозначает n-мерный нулевой вектор. В матричном виде задача (4.26) имеет вид

$$\max \langle c^*, x\rangle$$
$$Rx \leqslant b, \quad x \geqslant 0,$$

где

$$R = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \dots & 0 & 0 \\ -I & A & 0 \dots & 0 & 0 \\ 0 & -I & A \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 \dots & -I & A \end{pmatrix}.$$

Здесь 0 — нулевая $n \times n$-матрица, I — единичная $n \times n$-матрица.

Обозначим вектор двойственных переменных через $p = (p^1, p^2, \dots, p^T)$. Тогда двойственная задача примет вид

$$\min \langle b, p \rangle$$
$$R'p \geqslant c^*, \quad p \geqslant 0,$$

или

$$\min \langle x^0, p^1 \rangle$$
$$A'p^t - p^{t+1} \geqslant 0, \ t = 1, \dots, T-1, \ A'p^T \geqslant c, \tag{4.28}$$
$$p^t \geqslant 0, \ t = 1, 2, \dots, T.$$

Для исследования решений задач (4.26) и (4.28) понадобится несколько лемм.

Лемма 4.9. *Коническая ε-окрестность вектора $\bar{x}$ является выпуклым конусом.*

Доказательство. Достаточно убедиться, что для любых $x^1, x^2 \in C_\varepsilon(\bar{x})$ имеют место включения $\lambda x^1 \in C_\varepsilon(\bar{x})$ (для любого $\lambda > 0$) и $x^1 + x^2 \in C_\varepsilon(\bar{x})$. Первое утверждение очевидно. Докажем второе. Поскольку $x^1, x^2 \in C_\varepsilon(\bar{x})$, то существуют такие числа $\lambda > 0$, $\mu > 0$, что $\|\lambda x^1 - \bar{x}\| < \varepsilon$, $\|\mu x^2 - \bar{x}\| < \varepsilon$. Покажем, что $\|\gamma(x^1 + x^2) - \bar{x}\| < \varepsilon$, где $\gamma = \lambda\mu/(\lambda + \mu)$. В самом деле,

$$\|\gamma(x^1 + x^2) - \bar{x}\| = \left\|\gamma(x^1 + x^2) - \frac{\mu}{\lambda+\mu}\bar{x} - \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\bar{x}\right\| =$$
$$= \left\|\frac{\mu}{\lambda+\mu}(\lambda x^1 - \bar{x}) + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}(\mu x^2 - \bar{x})\right\| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\mu}{\lambda+\mu}\|\lambda x^1 - \bar{x}\| + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\|\mu x^2 - \bar{x}\| < \varepsilon.$$

Следующая лемма уточняет утверждение теоремы 4.9.

Лемма 4.10. *Пусть A — примитивная матрица. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное число $T_1(\varepsilon)$, что для любого $x \in \mathbb{R}^n_+$ при $t > T_1(\varepsilon)$ вектор $x_t = A^t x$ принадлежит конической ε-окрестности $C_\varepsilon(x_A)$.*

Доказательство. Отличие этой леммы от теоремы 4.9 состоит в том, что здесь номер $T_1(\varepsilon)$ не зависит от вектора x. Пусть $e^1, e^2, \ldots, e^n$ — базисные векторы пространства $\mathbf{R}^n$. По теореме 4.9 для каждого e^i существует такое число $T(\varepsilon, e^i)$, что при $t > T(\varepsilon, e^i)$ выполняется включение $A^t e^i \in C_\varepsilon(x_A)$. Пусть

$$T_1(\varepsilon) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} T(\varepsilon, e^i).$$

Так как $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e^i$, то $A^t x = \sum_{i=1}^{n} x_i A^t e^i$. Учитывая, что $x_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, а также то, что согласно лемме 4.9 $C_\varepsilon(x_A)$ — выпуклый конус, получаем $A^t x \in C_\varepsilon(x_A)$ при $t > T_1(\varepsilon)$.

Лемма 4.11. *Если матрица A примитивна, то существует такой номер T_0, что для любого $x \geqslant 0$, $x \neq 0$, при $t > T_0$ имеет место неравенство $A^t x > 0$.*

Доказательство. Поскольку матрица A неразложима, то $x_A > 0$. Возьмем $\varepsilon_0 > 0$ настолько малым, чтобы коническая ε_0-окрестность вектора x_A состояла только из положительных векторов (не считая 0). По лемме 4.10 найдется такой номер $T_0 = T_1(\varepsilon_0)$, что при $t > T_0$ имеет место включение $A^t x \in C_{\varepsilon_0}(x_A)$, т. е. выполняется неравенство $A^t x > 0$.

Лемма 4.12. *Существует такое число T_0, что для всякого решения $\{\tilde{p}_t\}$ задачи (4.28) имеют место равенства*

$$A' \tilde{p}^t = \tilde{p}^{t+1} \qquad (4.29)$$

для всех t, $1 \leqslant t \leqslant T - T_0$.

Доказательство. Покажем вначале, что в решении $\{\tilde{x}^t\}$ задачи (4.26) вектор $\tilde{x}^T$ — не нулевой. В самом деле, если $\tilde{x}^T = 0$, то максимальное значение целевой функции $\langle c, x^T \rangle$ также равно 0. Вместе с тем нетрудно указать план задачи (4.26), для которого значение целевой функции больше нуля. Положим $x^t = \alpha A^{T-t} x_A$, $t = 1, 2, \ldots, T$. Легко убедиться, что при таком плане все ограничения задачи (4.26), кроме первого, обращаются в равенства. Выбрав число $\alpha > 0$ достаточно малым и воспользовавшись тем, что $x^0 > 0$, можно добиться и выполнения первого неравенства: $\alpha \lambda_A^{T-1} x_A \leqslant x^0$. При этом $\langle c, x^T \rangle = \alpha \langle c, x_A \rangle > 0$. Таким образом, $\tilde{x}^T \neq 0$. Заметим, что из ограничений (4.26) следует, что $\tilde{x}^t \geqslant A^{T-t} \tilde{x}^T$. Воспользовавшись леммой 4.11, получаем, что если $T - t \geqslant T_0$, т. е. если $t \leqslant T - T_0$, то $\tilde{x}^t \geqslant A^{T-t}\tilde{x}^T > 0$. Применяя теперь теорию двойственности, получаем, что все соответствующие ограничения двойственной задачи при подстановке в них ее решения обращаются в равенства.

Лемма 4.13. *Существует такое число T_1, что для всякого решения $\{\tilde{x}^t\}$ задачи (4.26) имеют место равенства*

$$A\tilde{x}^{t+1} = \tilde{x}^t \tag{4.30}$$

при всех t, $T_1 \leqslant t \leqslant T - T_0$.

Доказательство. Как следует из (4.29), $p^t = (A')^{t-1}p^1$, $t = 1, 2, \ldots, T - T_0$. Отметим, что $p^1 \neq 0$, поскольку из (4.29) вытекает также, что $(A')^T p^1 \geqslant c \neq 0$ Следовательно, по лемме 4.11, примененной к матрице A', существует такое число T_0', что при $t - 1 \geqslant T_0'$ имеют место неравенства $p^t = (A')^{t-1}p^1 > 0$. Остается положить $T_1 = 1 + T_0'$ и вновь воспользоваться теорией двойственности.

Доказательство теоремы о магистрали теперь легко получается применением леммы 4.10 к последовательности $\{\tilde{x}^t\}$, $T_1 \leqslant t \leqslant T - T_0$, так как из (4.30) следует, что $\tilde{x}^{T-T_0-t} = A^t \tilde{x}^{T-T_0}$.

Обращаясь к лемме 4.10, имеем, что найдется такое число $T(\varepsilon)$, что при $t > T(\varepsilon)$ имеет место включение $\tilde{x}^{T-T_0-t} \in C_\varepsilon(x_A)$. Это означает, что любой вектор $\tilde{x}^t$, номер которого удовлетворяет неравенствам $t \geqslant T_1$ и $t \leqslant T - T_0 - T(\varepsilon)$, принадлежит $C_\varepsilon(x_A)$. Обозначив $T_0 + T(\varepsilon) = T_2(\varepsilon)$, получаем утверждение теоремы о магистрали. При этом, правда, мы получили также, что T_1 не зависит от ε, но это несущественно.

§ 6. Принцип максимума для дискретных линейных задач оптимального управления

Дискретной линейной задачей оптимального управления называется динамическая задача следующего вида (см. гл. I):

$$\max\left[\langle c^{T+1}, x^{T+1}\rangle + \sum_{t=1}^{T}\langle c^t, x^t\rangle + \sum_{t=0}^{T}\langle b^t, u^t\rangle\right]$$

$$x^{t+1} = A_t x^t + B_t u^t, \tag{4.31}$$

$$D_t u^t \leqslant d^t, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots, T, \tag{4.32}$$

$$x^0 = \hat{x}.$$

Здесь

A_t — матрица размеров $n \times n$;

B_t — матрица размеров $n \times m$;

D_t — матрица размеров $l \times m$;

x^t, c^t, $\hat{x}$ — векторы из пространства $\mathbf{R}^n$;

b^t, u^t — векторы из пространства $\mathbf{R}^m$;

d^t — вектор из пространства $\mathbf{R}^l$.

В этой задаче требуется таким образом определить последовательность управлений $\bar{u}^t$, $t = 0, 1, 2, \ldots, T$, удовлетворяющих ограничениям (4.32), чтобы она вместе с соответствующей последовательностью $\bar{x}^t$, определяемой формулой (4.31) при начальном значении $\bar{x}^0 = \hat{x}$, максимизировала значение целевой функции.

Аналогичные задачи для процессов с непрерывным временем изучаются в теории оптимального управления. Основным результатом этой теории является принцип максимума Понтрягина, дающий эффективный метод исследования оптимальных траекторий движения.

Задача (4.31), (4.32) линейна, и поэтому для нее нетрудно получить полный аналог принципа максимума.

С тем чтобы сделать эту аналогию более наглядной, для читателя, знакомого с основами теории дифференциальных уравнений, приведем формулировку принципа максимума Понтрягина. В дальнейшем этот результат не используется.

Пусть вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ описывает положение управляемого объекта в пространстве $\mathbf{R}^n$.

Движение объекта состоит в том, что его координаты зависят от времени и от величин $u_1, u_2, \ldots, u_m$, называемых *управлениями*, $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$. Управление u в свою очередь меняется во времени, однако его изменение в некотором смысле зависит только от управляющего субъекта. Пусть задано замкнутое множество $U \subseteq \mathbf{R}^m$. Управление $u(t)$ называется *допустимым*, если в каждый момент времени t вектор $u(t)$ принадлежит множеству U и функция $u(t)$ кусочно непрерывна.

Пусть известно начальное состояние объекта $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ и, кроме того, известен закон движения, представленный в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка: $\dot{x}_i = f_i(x, u, t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, где функции f_i предполагаются непрерывными по совокупности переменных и непрерывно дифференцируемы по x_i и по t.

Если теперь выбрано некоторое допустимое управление $u(t)$, то заданная система дифференциальных уравнений вместе с начальным условием $x(0)=x^0$ однозначно определит траекторию $x(t)$. Рассмотрим функционал $\int\limits_0^T f_0(x, u, t)\,dt$, где f_0 — некоторая интегрируемая функция.

Задача состоит в том, чтобы среди допустимых управлений $u(t)$ выбрать такое, которое бы вместе с соответствующей траекторией $x(t)$ максимизировало заданный функционал при фиксированном $T>0$.

Для решения этой задачи вводятся новые двойственные переменные $\psi_0(t)$, $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, ..., $\psi_n(t)$ и строится функция Гамильтона

$$H(\psi, x, u, t) = \sum_{i=0}^{n} \psi_i f_i(x, u, t).$$

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений, которая называется *сопряженной:*

$$\dot{\psi}_0 = 0, \quad \dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Пусть $u^*(t)$ — оптимальное управление, $x^*(t)$ — соответствующая траектория.

Теорема (принцип максимума Понтрягина). *Существует решение* $\psi^*(t) = \left(\psi_0^*(t), \psi_1^*(t), \ldots, \psi_n^*(t)\right)$ *сопряженной системы уравнений, при котором*

$$H(\psi^*, x^*, u^*, t) = \max_{u\in U} H(\psi^*, x^*, u, t)$$

для каждого t, $0 \leqslant t \leqslant T$. *При этом вектор* $\psi^*(t)$ *не обращается в* 0 *нигде на отрезке* $[0, T]$.

Приступим к изучению задачи (4.31), (4.32). Обозначим множество векторов u^t, описываемое неравенством (4.32), через U_t. Пусть p^t — двойственные переменные, соответствующие условию (4.31) при $t=0, 1, 2, \ldots, T$. Здесь p^t — вектор размерности n. Аналог функции Гамильтона для задачи (4.31), (4.32) имеет вид

$$H_t(p^t, x^t, u^t) = \langle c^t, x^t\rangle + \langle b^t, u^t\rangle + \langle p^t, A_t x^t + B_t u^t\rangle.$$

В качестве сопряженной системы возьмем систему уравнений

$$p^{t-1} = \frac{\partial H_t}{\partial x^t}, \qquad t = T, \quad T-1, \ldots, 1,$$

или

$$p^{t-1} = c^t + A_t' p^t, \qquad t = T, \quad T-1, \ldots, 1, \quad p^T = 0. \tag{4.33}$$

Отметим, что в функции Гамильтона не все слагаемые зависят от u^t. Это позволяет ввести более простую функцию

$$H_t(u^t, p^t) = \langle b^t, u^t \rangle + \langle p^t B_t u^t \rangle.$$

Теорема 4.10 (принцип максимума). *Для того чтобы в задаче* (4.31), (4.32) *управление* $\bar{u}^t$ *было оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$H_t(\bar{u}^t, p^t) = \max_{u \in U_t} H_t(u, p^t), \tag{4.34}$$

где p^t *определяется по формулам* (4.33).

Доказательство. Задача (4.31), (4.32) представляет собой задачу линейного программирования. Построим к ней двойственную. С этой целью выпишем более подробно матрицу ограничений прямой задачи. Вектор переменных задачи (4.31), (4.32) имеет вид $x = (u^0, x^1, u^1, x^2, \ldots, u^T, x^{T+1})$. Следовательно, его размерность равна $(T+1)(n+m)$.

Матрица ограничений имеет вид

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} -B_0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A_1 & -B_1 & I & 0 & 0 \ldots 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_1 & 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -A_2 & -B_2 & I \ldots 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots 0 & -A_T & -B_T & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 & D_T & 0 \end{pmatrix},$$

вектор правой части ограничений $\bar{b} = (A_0 x^0, 0, 0, \ldots, 0)$.

Пусть вектор $p^t = (p_1^t, \ldots, p_n^t)$ двойственных переменных соответствует ограничению (4.31), $t = 0, 1, 2, \ldots, T$, а вектор $q^t = (q_1^t, \ldots, q_l^t)$ — ограничению (4.32), $t = 0, 1, 2, \ldots, T$.

Тогда задача, двойственная к (4.31), (4.32), принимает следующий вид:

$$\min \langle p^0, A_0 x^0 \rangle$$

$$-B_t' p^t + D_t' q^t = b^t, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots, T, \qquad (4.35)$$

$$\left.\begin{array}{ll} p^{t-1} - A_t' p^t = c^t, & t = 1, 2, \ldots, T, \\ p^T = 0, \quad q^t \geqslant 0, & t = 0, 1, 2, \ldots, T. \end{array}\right\} \qquad (4.36)$$

Обратим внимание на то, что двойственная задача построена в полном соответствии с правилами, сформулированными в гл. III: поскольку на переменные прямой задачи не накладывается условие неотрицательности, то все ограничения двойственной задачи носят характер равенства; на переменные q^t наложено условие неотрицательности в связи с тем, что соответствующие им ограничения (4.32) являются неравенствами.

Пусть p^t, $t = T, T-1, \ldots, 1, 0$,— последовательность, определяемая из (4.36) при $p^T = 0$. Тогда

$$H_t(u, p^t) = \langle b^t + B_t' p^t, u \rangle = \langle D_t' q^t, u \rangle. \qquad (4.37)$$

Здесь мы воспользовались равенством (4.35). Пусть теперь $u \in U_t$ — произвольный вектор, т. е. $D_t u \leqslant d^t$. Поскольку $q^t \geqslant 0$, то $\langle q^t, D_t u \rangle \leqslant \langle d^t, q^t \rangle$. Учитывая, что $\langle D_t' q^t, u \rangle = \langle q^t, D_t u \rangle$, из (4.37) получаем

$$H_t(u, p^t) \leqslant \langle d^t, q^t \rangle \qquad (4.38)$$

для любого $u \in U_t$.

По теореме двойственности для общей задачи линейного программирования допустимый вектор $x^* = (\bar{u}^0, \bar{x}^1, \bar{u}^1, \ldots, \bar{u}^T, \bar{x}^{T+1})$ является оптимальным для задачи (4.31), (4.32) тогда и только тогда, когда

$$\langle D_t \bar{u}^t, q^t \rangle = \langle d^t, q^t \rangle, \qquad t = 0, 1, \ldots, T,$$

для всякого вектора q^t, участвующего в решении задачи (4.31), (4.32).

Сравнивая с (4.37), получаем

$$H_t(\bar{u}^t, p^t) = \max_{u \in U_t} H_t(u, p^t),$$

что и доказывает теорему.

Одно из возможных применений принципа максимума состоит в следующем. Допустим, что приходится часто решать задачу (4.31), (4.32) с различными начальными состояниями $\hat{x}$, векторами b^t, d^t и матрицами B_t, D_t. Это означает, что все параметры, связанные с управлениями u_t, могут меняться. Тогда достаточно один раз вычислить значения p_t по формулам (4.33), после чего на каждом шаге t решать задачу оптимизации (4.34), в которой вектор u переменных имеет размерность m, что существенно проще, чем решать исходную задачу с вектором x размерности $(T+1)(n+m)$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Доказать, что $n \times n$-матрица $A = (a_{ij})$ с элементами $a_{ij} = i - j$ имеет седловую точку в чистых стратегиях.

2. Показать, что множество оптимальных стратегий в матричной игре образует выпуклый многогранник.

3. Пусть столбцы матрицы A — неотрицательные ненулевые векторы. Показать, что значение игры с матрицей A положительно.

4. Доказать, что матрица A разложима тогда и только тогда, когда разложима матрица A'.

5. Доказать, что если $\lambda_A = 0$, то матрица A разложима.

6. Пусть A — неразложимая матрица. Верно ли, что A^2 также неразложима?

7. Установить следующие свойства числа Фробениуса λ_A матрицы A: $\lambda_A = \lambda_{A'}$; $\lambda_{A^k} = \lambda_A^k$; $\lambda_{\alpha A} = \alpha\lambda_A$ при $\alpha \geqslant 0$, $\lambda_A \geqslant \lambda_B$, если $A \geqslant B \geqslant 0$.

8. Матрица A неразложима тогда и только тогда, когда для любых двух индексов i, j, $1 \leqslant i$, $j \leqslant n$, существует такая последовательность $i = i_1, i_2, \ldots, i_m = j$, что $a_{i_t i_{t+1}} > 0$, $t = 1, 2, \ldots$ $\ldots, m-1$. Доказать.

9. Показать, что если $\{x^t\}$ — произвольная оптимальная траектория в задаче (4.26), то $\bar{x}^t = A^{T-t}x^T$, $t = 1, 2, \ldots, T$,— также оптимальная траектория.

10. Доказать теорему о магистрали для задачи

$$\max \alpha$$
$$Ax^1 \leqslant x^0, \quad A\bar{x}^{t+1} \leqslant x^t, \quad t = 1, 2, \ldots, T,$$
$$x^T \geqslant \alpha\hat{x},$$

где A — примитивная матрица, $x^0 > 0$, $\hat{x} > 0$.

11. Пусть A — импримитивная матрица. Доказать, что матрица A^m — блочно-диагональная при некотором натуральном m.

12. Доказать, что существует такой вектор $\alpha \in \mathbf{R}^n$, $\alpha > 0$, что для любого вектора $x \in X$, где $X = \{x \mid x \in \mathbf{R}^n_+, \ \|x\| = 1, \ Ax < x\}$, выполняется неравенство $x \geqslant \alpha$. Матрица A предполагается неразложимой.

§ 1. Метод исключения Жордана — Гаусса для систем линейных уравнений

1. Большинство из существующих численных методов решения задач линейного программирования использует идею приведения системы линейных уравнений

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1,\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m,
\end{aligned}
$$

которая в матричной форме записывается в виде $Ax = b$, к более удобному виду с помощью так называемого *метода Жордана — Гаусса*, изучаемого в общем курсе алгебры. Напомним вкратце его содержание.

В первом уравнении системы отыскивается коэффициент a_{1i_1}, отличный от нуля. С помощью этого коэффициента обращаются в нуль коэффициенты при переменной x_{i_1} в остальных уравнениях системы. Для этого первое уравнение умножается на число $-a_{ri_1}/a_{1i_1}$ и прибавляется к уравнению с номером r, $2 \leqslant r \leqslant m$. Затем первое уравнение делится на число a_{1i_1}. Это преобразование называется *элементарным преобразованием*; оно не меняет множества решений системы. Полученная эквивалентная система обладает тем свойством, что переменная x_{i_1} присутствует только в первом уравнении, и притом с коэффициентом 1. Переменная x_{i_1} называется *базисной переменной*.

Аналогичная операция совершается поочередно с каждым уравнением системы; при этом всякий раз преобразуются все уравнения и выполняется список базисных переменных.

Результатом применения метода Жордана — Гаусса является следующее: либо устанавливается, что система уравнений несовместна (все коэффициенты очередного рассматриваемого уравнения нулевые, а свободный член отличен от нуля), либо выявляются и отбрасываются все «лишние» уравнения (у которых все коэффициенты и свободный член равны нулю); при этом итоговая система уравнений имеет вид

$$x_i + \sum_{j\in\omega} \alpha_{ij}x_j = \alpha_{i0}, \qquad i \in \sigma,$$

где $\sigma = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ — список номеров базисных переменных, $\omega = \{1, 2, \ldots, n\} \backslash \sigma$ — множество номеров небазисных переменных. Здесь $k (k \leqslant m)$ — ранг матрицы A коэффициентов исходной системы уравнений.

Полученную систему уравнений будем называть *приведенной системой*, соответствующей множеству σ номеров базисных переменных.

Нетрудно видеть, что в качестве базисных переменных $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ может служить лишь такой набор, для которого соответствующая система $\{a^{i_1}, a^{i_2}, \ldots, a^{i_k}\}$ столбцов матрицы A линейно независима.

Приведенная система уравнений удобнее первоначальной, поскольку дает явное описание множества всех решений. Давая небазисным переменным x_j, $j \in \omega$, произвольные значения, вычисляем значения остальных (базисных) переменных по формулам

$$x_i = \alpha_{i0} - \sum_{j\in\omega} \alpha_{ij}x_j, \qquad i \in \sigma,$$

таким образом получаем любое решение системы. В частности, одно из решений задается вектором $x^0 = \left(x_1^0, x_2^0, \ldots \right.$ $\left. \ldots, x_n^0\right)$, где

$$x_i^0 = \begin{cases} \alpha_{i0}, & \text{если } i \in \sigma, \\ 0, & \text{если } i \in \omega. \end{cases}$$

Пусть ранг матрицы A равен m (т. е. $k = m$). Если обозначить через

$$A_\sigma = \left(a^{i_1}, a^{i_2}, \ldots, a^{i_m}\right)$$

матрицу, составленную из столбцов матрицы A, соответствующих базисным переменным, то A_σ — квадратная невырожденная матрица размера $m \times m$. В этом случае преобразование Жордана — Гаусса состоит в умножении исходной системы на матрицу A_σ^{-1}, и приведенная система имеет вид $A_\sigma^{-1}Ax = A_\sigma^{-1}b$.

Данный факт проверяется непосредственно. Действительно, обозначим элементы $m \times n$-матрицы $A_\sigma^{-1}A$ через β_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$. По определению обратной матрицы имеем: при $i \in \sigma$ $\beta_{ij} = 0$, если $j \notin \sigma$, $\beta_{ii} = 1$. Обозначим вектор $A_\sigma^{-1}b$ через $\beta^0 = (\beta_{10}, \beta_{20}, \ldots, \beta_{m0})$. Тогда система уравнений $A_\sigma^{-1}Ax = A_\sigma^{-1}b$ имеет вид

$$x_i + \sum_{j\in\omega} \beta_{ij}x_j = \beta_{i0}, \qquad i \in \sigma.$$

При умножении на невырожденную матрицу множество решений системы уравнений не меняется (см. упр. 1), отсюда нетрудно показать, что $\beta_{ij} = \alpha_{ij}$ для всех i, j (см. упр. 2).

2. Для исследования поведения линейной формы $\langle c, x\rangle$ на множестве векторов, являющихся решениями системы уравнений $Ax = b$, введем дополнительную переменную x_0 и рассмотрим систему уравнений

$$x_0 - \langle c, x\rangle = 0, \quad Ax = b.$$

Поскольку уравнение $x_0 - \langle c, x\rangle = 0$ стоит первым и коэффициент при дополнительной переменной x_0 отличен от нуля, то применяя метод Жордана — Гаусса, можем всегда эту переменную включать в список базисных переменных. Если $\sigma = \{i_1, i_2, \ldots, i_m\}$ — список базисных переменных для уравнения $Ax = b$ и уже найдена соответствующая приведенная система (считаем, что ранг матрицы A равен m), то для нахождения приведенной системы, соответствующей списку $\{0, i_1, i_2, \ldots, i_m\}$, нужно выразить переменную x_0 через небазисные:

$$x_0 = \langle c, x\rangle = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j = \sum_{i\in\sigma} c_ix_i + \sum_{j\in\omega} c_jx_j.$$

Подставляя в это выражение значения базисных переменных x_i, $i \in \sigma$, получаем

$$x_0 = \sum_{i\in\sigma} c_i\alpha_{i0} - \sum_{j\in\omega}\left(\sum_{i\in\sigma} c_i\alpha_{ij} - c_j\right)x_j.$$

Используя введенный выше вектор x^0, заметим, что $\sum\limits_{i\in\sigma} c_i\alpha_{i0} = \langle c, x^0\rangle$. Теперь, если введем обозначение

$\alpha_{0j}=\sum_{i\in\sigma}\alpha_{ij}-c_j$, $j\in\omega$, то приведенная система уравнений примет вид

$$x_0+\sum_{j\in\omega}\alpha_{0j}x_j=\langle c,\ x^0\rangle,$$
$$x_i+\sum_{j\in\omega}\alpha_{ij}x_j=\alpha_{i0},\quad i\in\sigma. \tag{5.1}$$

§ 2. Опорные планы

Одним из основных численных методов решения задач линейного программирования является симплекс-метод, с помощью которого решается каноническая задача линейного программирования:

$$\max\,(c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n)$$
$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1,$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m,$$
$$x_1\geqslant 0,\quad x_2\geqslant 0,\ \ldots,\ x_n\geqslant 0,$$

или в матричной форме

$$\max\,\langle c,\ x\rangle$$
$$Ax=b,\quad x\geqslant 0. \tag{5.2}$$

Так как через a^j обозначается j-й столбец матрицы A, то задачу (5.2) можно записать следующим образом:

$$\max\,(c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n)$$
$$a^1x_1+a^2x_2+\ldots+a^nx_n=b,$$
$$x_1\geqslant 0,\quad x_2\geqslant 0,\ \ldots,\ x_n\geqslant 0. \tag{5.3}$$

Отсюда видно, что между столбцами a^j матрицы A и переменными x_j имеется взаимно однозначное соответствие. Из записи (5.3) видно, что вектор $x=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$, $x_j\geqslant 0$, $j=1,\ 2,\ \ldots,\ n$, является планом задачи (5.2) в том и только том случае, когда вектор b выражается как неотрицательная линейная комбинация столбцов матрицы A, где в качестве коэффициентов берутся координаты вектора x.

Как отмечалось в гл. I § 4, максимум линейной формы $\langle c, x\rangle$ достигается на границе множества $X=\{x \mid x\in \mathbf{R}^n, Ax=b, x\geqslant 0\}$ допустимых планов задачи (5.2).

Обратим внимание на то, что множество X регулярно: матрица $\bar{A}$ его ограничений имеет ранг n: $\bar{A}=\begin{pmatrix} A \\ -I \end{pmatrix}$, где I — единичная $n\times n$-матрица. По теореме 2.23 § 4 гл. II заключаем, что множество X имеет крайние точки, причем их конечное число (см. теорему 2.19). Если задача (5.2) имеет решение, то среди крайних точек множества X найдется оптимальный план,— это следует из теоремы 3.2 § 2 гл. III.

Учитывая перечисленные факты, получаем следующую процедуру поиска решений задачи (5.2): привлекая необходимое и достаточное условие того, что точка множества X является крайней (теорема 2.18, § 4 гл. II), выбираем подматрицу $\bar{A}_\sigma$ ранга n матрицы $\bar{A}$, затем решаем уравнение $\bar{A}_\sigma x=\bar{b}_\sigma$ (здесь $\bar{b}=(b_1, b_2, \ldots, b_n, 0, \ldots, 0)$) и запоминаем вектор x_σ — решение этой системы уравнения. Теперь остается только сравнить значения целевой функции $\langle c, x_\sigma\rangle$ для всех векторов $x_\sigma\geqslant 0$, полученных подобным образом, и выбрать тот из векторов, для которого это значение максимально.

Хотя описанная процедура является конечной, т. е. требует выполнения конечного числа операций, однако это число для задач линейного программирования, возникающих из практических нужд, как правило, очень велико.

В самом деле, число всех подматриц размером $n\times n$ у матрицы $\bar{A}$ равно C^n_{m+n}. Все эти подматрицы придется перебрать, чтобы выбрать из них те, ранг которых равен n. При этом количество таких невырожденных подматриц может также оказаться очень большим, близким к числу C^n_{m+n}. Насколько велико данное число, видно из того, что уже при $m=50$, $n=50$ оно превосходит 2^{60}. А ведь потребуется еще решить примерно такое же число систем линейных уравнений $\bar{A}_\sigma x=\bar{b}_\sigma$! В то же время часто приходится решать практические задачи линейного программирования, в которых количество ограничений и переменных исчисляется сотнями.

Таким образом, подобный полный перебор крайних точек множества X как численный метод решения задач линейного программирования непригоден. Симплекс-метод позволяет сократить этот перебор настолько, что современные ЭВМ справляются с решением задач большой размерности.

Мы переходим к изложению терминологии, теории и алгоритма симплекс-метода.

С тем чтобы иллюстрировать основные понятия и идеи этого метода, будем рассматривать два чисто условных учебных примера задач линейного программирования:

$$
\begin{aligned}
&\max\,(5x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5)\\
&2x_1 \qquad\;\; + 6x_3 + 4x_4 - 3x_5 = 2,\\
&-x_1 + 3x_2 + 7x_3 \qquad\; - 2x_5 = 1,\\
&x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 = 1,\\
&x_1,\quad x_2,\quad x_3,\quad x_4,\quad x_5 \geqslant 0;
\end{aligned}
\tag{5.4}
$$

$$
\begin{aligned}
&\max\,(x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + x_5)\\
&-x_1 \qquad\;\; + 4x_3 + 3x_4 \qquad\; = 2,\\
&2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 5x_4 - x_5 = 3,\\
&x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 2,\\
&x_1,\quad x_2,\quad x_3,\quad x_4,\quad x_5 \geqslant 0.
\end{aligned}
\tag{5.5}
$$

Определение 5.1. План $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ задачи (5.2) называется *опорным планом*, если система вектор-столбцов a^j матрицы A, соответствующих положительным координатам x_j, линейно независима.

Теорема 5.1. *Если задача* (5.2) *допустима, то у нее существует опорный план.*

Это утверждение совпадает с леммой 2.1 из § 3 гл. II, которая утверждает (в обозначениях этой главы), что если вектор b может быть выражен как неотрицательная линейная комбинация векторов a^j, $j = 1, 2, \ldots, n$, то он может быть выражен как неотрицательная комбинация линейно независимой подсистемы этих векторов.

Теорема 5.2. *Вектор x является опорным планом задачи* (5.1) *тогда и только тогда, когда x — крайняя точка многогранника X допустимых векторов.*

Доказательство. Пусть $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, \ldots \ldots, 0)$, где $x_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Вектор x удовлетворяет следующим ограничениям задачи (5.2): $Ax = b$, $x_{k+1} = 0$, $x_{k+2} = 0, \ldots, x_n = 0$. При этом соответствующая матрица-носитель такова:

$$\overline{A}_\sigma = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & a_{2,k+1} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} & a_{m,k+1} & \dots & a_{mn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix}$$

(см. определение 2.17 § 4 гл. II носителя σ точки x).

Так как столбцы $a^1, a^2, \ldots, a^k$ матрицы A, в соответствии с определением опорного плана, линейно независимы, то, очевидно, линейно независимы все n столбцов матрицы $\overline{A}_\sigma$. Следовательно, ранг этой матрицы равен n. Отсюда по теореме 2.18 следует, что x — крайняя точка.

Обратное утверждение доказывается аналогично.

Теорема 5.3. *Среди опорных планов задачи* (5.2) *найдется оптимальный план.*

Доказательство вытекает из предыдущей теоремы и теоремы 3.2.

Как известно, любую независимую подсистему векторов можно дополнить до максимальной линейно независимой подсистемы. Если ранг матрицы A равен m, то число векторов в максимальной линейно независимой подсистеме системы ее столбцов также равно m. Поэтому можем дать следующее определение.

Определение 5.2. Пусть ранг матрицы A равен m. *Базисом опорного плана* называется произвольная линейно независимая система из m столбцов матрицы A, включающая в себя все столбцы, соответствующие ненулевым координатам опорного плана.

Определение 5.3. Опорный план называется *невырожденным опорным планом*, если число его ненулевых координат равно m — числу строк в матрице A.

Из этих определений следует, что невырожденный опорный план обладает единственным базисом, в то время как у вырожденного их может быть несколько.

Понятно, что задача (5.2) может обладать невырожденными опорными планами лишь в том случае, когда ранг матрицы A равен m, т. е. когда в системе ограничений, задаваемых матрицей A, нет «лишних».

Однако, как будет видно ниже из примеров, даже если ранг матрицы A равен m, не все опорные планы задачи (5.2) будут обязательно невырожденными.

Определение 5.4. Задачу (5.1) назовем *невырожденной задачей*, если ранг матрицы A равен m и любой опорный план невырожден.

Поясним введенные понятия на примерах задач (5.4), (5.5).

Для задачи (5.4) опорным является, например, план $x = (1/5,\ 2/5,\ 0,\ 2/5,\ 0)$, поскольку столбцы $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ матрицы ограничений, соответствующие положительным координатам вектора x, линейно независимы. Чтобы в этом убедиться, достаточно вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$. Этот опорный план невырожден, так как число положительных координат вектора x равно 3 — числу строк матрицы ограничений.

Для задачи (5.5) вектор $x = (3/4,\ 0,\ 11/16,\ 0,\ 9/16)$ является невырожденным опорным планом, а план $x = (0,\ 1/2,\ 1/2,\ 0,\ 0)$ вырожден.

Обсудим требование невырожденности задачи. Рассмотрим в пространстве $\mathbf{R}^m$ коническую оболочку K векторов $a^1, a^2, \ldots, a^n$ — столбцов матрицы A. Если задача (5.2) допустима, то вектор b принадлежит конусу K, поскольку он представляется в виде неотрицательной линейной комбинации (5.3) векторов a^j, $j = 1, 2, \ldots, n$. Понятие невырожденности задачи отражает расположение вектора в этом конусе.

Для пояснения сказанного обратимся к примерам (5.4), (5.5). Чтобы избежать вычерчивания рисунков в трехмерном пространстве, прибегнем к следующему приему. Рассмотрим конус K для задачи (5.4):

$$K = \mathrm{Co}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}.$$

Этот конус лежит в трехмерном пространстве, точки которого мы будем обозначать $u = (u_1,\ u_2,\ u_3)$. В этом пространстве рассмотрим гиперплоскость $u_3 = 1$ и ее пересечение $\overline{K}$ с конусом K.

Нетрудно понять, что, например, координаты точки пересечения луча $\mu\begin{pmatrix}6\\7\\2\end{pmatrix}$ с гиперплоскостью $u_3 = 1$ получаются следующим образом: нужно в качестве μ взять 1/2 с тем, чтобы последняя координата стала равной единице. Из этих соображений ясно, что $\bar{K}$ является выпуклой оболочкой точек

$$\bar{a}^1 = (2,\ -1),\quad \bar{a}^2 = (0,\ 3),\quad \bar{a}^3 = (3,\ 7/2),$$
$$\bar{a}^4 = (4,\ 0)\quad \bar{a}^5 = (-3/2,\ -1).$$

Здесь через $\bar{a}^j$ обозначены точки пересечения луча μa^j, $\mu \geqslant 0$, с гиперплоскостью $u_3 = 1$.

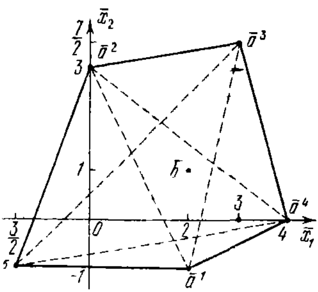

Рис. 5.1.

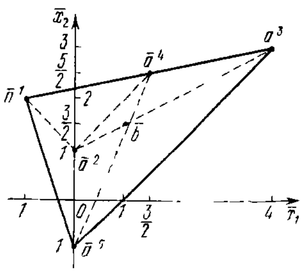

Рис. 5.2.

Пересечение луча μb с этой гиперплоскостью задается вектором $\bar{b} = (2,\ 1)$. Ясно, что вектор b является неотрицательной линейной комбинацией векторов a^j (т. е. $b \in K$) тогда и только тогда, когда $\bar{b}$ — выпуклая линейная комбинация векторов $\bar{a}^j$, $j = 1, 2, \ldots, m$ (т. е. $\bar{b} \in \bar{K}$).

На рис. 5.1 изображен многогранник $\bar{K}$ для задачи (5.4).

Аналогичным образом построим многогранник $\bar{K}$ для задачи (5.5). Он изображен на рис. 5.2.

Основная разница между рис. 5.1 и 5.2 состоит в том, что на рис. 5.2 вектор $\bar{b}$ лежит на отрезке, соединяющем две точки $\bar{a}^2$ и $\bar{a}^3$, т. е. вектор b может быть представлен как неотрицательная линейная комбинация векторов a^2 и a^3: $\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\3\\3\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix}$. Этому представлению соответствует вырожденный опорный план $x =$

$=(0,\ 1/2,\ 0,\ 0)$. На рис. 5.1, отражающем ситуацию задачи (5.4), вектор $\bar{b}$ не лежит ни на каком из отрезков, соединяющем две точки $\bar{a}^j$, т. е. вектор b может быть представлен как неотрицательная линейная комбинация самое меньшее трех вектор-столбцов матрицы A.

Согласно определению 5.3 задача (5.4) невырождена, в то время как задача (5.5) является вырожденной.

Из этих иллюстративных примеров ясно, что случай вырожденной задачи должен встречаться относительно редко, и, как показывает практика, это действительно так. Тем не менее, вычислительная процедура симплекс-метода предусматривает возможность вырожденной задачи. Однако, с целью сделать более явной основную идею метода, вначале изложим его для невырожденной задачи.

Ситуация, когда ранг матрицы A меньше m, также будет рассмотрена позднее.

§ 3. Симплекс-метод для невырожденной задачи линейного программирования

1. Основные понятия и обозначения. Пусть x^0 — некоторый опорный план задачи (5.2) и

$$\{a^{i_1}, a^{i_2}, \ldots, a^{i_m}\} \tag{5.6}$$

— его базис.

Обозначим $\sigma=\{i_1, i_2, \ldots, i_m\}$, $x_\sigma^0=\left(x_{i_1}^0, x_{i_2}^0, \ldots, x_{i_m}^0\right)$, $c_\sigma=\left(c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_m}\right)$. Отметим, что задание базиса полностью определяет опорный план. В самом деле, если $A_\sigma=\left(a^{i_1}, a^{i_2}, \ldots, a^{i_m}\right)$ — квадратная $m\times m$-матрица, составленная из столбцов матрицы A, участвующих в базисе (5.6), то A_σ — невырожденная матрица и существует обратная ей матрица A_σ^{-1}.

Так как $x_j^0=0$ при $j\notin\sigma$, то $Ax^0=A_\sigma x_\sigma^0$, т. е. $A_\sigma x_\sigma^0= b$, откуда

$$x_\sigma^0=A_\sigma^{-1}b. \tag{5.7}$$

Таким образом, задание базиса (5.6) однозначно определяет m-мерный вектор x_σ^0, откуда и находим вектор x^0:

$$x_j^0=\begin{cases}0, & \text{если } j\notin\sigma,\\ x_j^0, & \text{если } j\in\sigma,\end{cases} \qquad j=1, 2, \ldots, n. \tag{5.8}$$

Отсюда видно, что поиск оптимального опорного плана можно осуществлять, подыскивая подходящий базис — систему из m линейно независимых столбцов матрицы A.

При этом, естественно, нужно заботиться о том, чтобы вектор, получаемый по формуле (5.7), был неотрицательным.

Пусть имеется начальный опорный план x^0. Мы называем его начальным, считая, что он вычислен каким-либо способом еще до применения основной процедуры симплекс-метода. В § 5 будет указан способ нахождения начального опорного плана.

Сопоставим задаче (5.2) систему уравнений

$$-x_0 + \langle c, x\rangle = 0, \quad Ax = b, \tag{5.9}$$

где x_0 — вспомогательная переменная.

Рассмотрим матрицу

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ b & a^1 & a^2 & \dots & a^n \end{pmatrix},$$

в первой строке которой стоят числа, во второй — m-мерные векторы; порядок этой матрицы — $(m+1)\times(n+1)$. Так как система векторов

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_{i_1} \\ a^{i_1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_{i_2} \\ a^{i_2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} c_{i_m} \\ a^{i_m} \end{pmatrix} \tag{5.10}$$

линейно независима в пространстве $\mathbb{R}^{m+1}$, то матрица

$$B_\sigma = \begin{pmatrix} -1 & c_{i_1} & c_{i_2} & \dots & c_{i_m} \\ 0 & a^{i_1} & a^{i_2} & \dots & a^{i_m} \end{pmatrix}$$

— квадратная невырожденная матрица размера $(m+1)\times\times(m+1)$, т. е. существует обратная к ней матрица B_σ^{-1}.

Введем важнейшее понятие симплекс-метода. Матрица $\mathfrak{A}$:

$$\mathfrak{A} = B_\sigma^{-1}\widetilde{A}$$

называется *симплексной таблицей*, соответствующей базису (5.6) опорного плана x^0.

Будем обозначать элементы первой строки симплексной таблицы символами $\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_n$. Для дальнейшего будет также удобно обозначить $\alpha_0 = (\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_n)$, $\Delta = (\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n)$, так что $\alpha_{0j} = \Delta_j$, $j = 0, 1, 2, \dots, n$.

Элементы остальных строк обозначим α_{ij}, $i \in \sigma$, $j = 0, 1, 2, \dots, n$. Как обычно, строку с номером $i \in \sigma$ обозначим $\alpha_i = (\alpha_{i0}, \alpha_{i1}, \dots, \alpha_{in})$.

Вектор, составленный из последних m координат j-го столбца матрицы $\mathfrak{A}$, обозначим $\alpha^j = (\alpha_{i_1 j}, \alpha_{i_2 j}, \dots, \alpha_{i_m j})$

$j=0, 1, 2, \ldots, n$, так что весь j-й столбец симплексной таблицы имеет вид $\begin{pmatrix} \Delta_j \\ \alpha^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{0j} \\ \alpha^j \end{pmatrix}$.

Элементы симплексной таблицы имеют наглядный смысл: если z, $y \in \mathrm{R}^{m+1}$, то запись $y = B_\sigma z$ означает, что вектор z представляет собой координаты вектора y в базисе (5.10). Поскольку $B_\sigma \mathfrak{A} = A$, то, записав матрицу B_σ в виде $B_\sigma = \begin{pmatrix} -1 & c_\sigma \\ 0 & A_\sigma \end{pmatrix}$, нетрудно заметить, что

$$A_\sigma \alpha^0 = b, \tag{5.11}$$

$$\langle c_\sigma, \alpha^0 \rangle - \Delta_0 = 0, \tag{5.12}$$

$$A_\sigma \alpha^j = a^j, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{5.13}$$

$$\langle c_\sigma, \alpha^j \rangle - \Delta_j = c_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{5.14}$$

Из равенства (5.11) следует, что

$$\alpha^0 = x^0_\sigma. \tag{5.15}$$

Используя, что $x^0_j = 0$, $j \notin \sigma$, легко получить

$$\Delta_0 = \langle c, x^0 \rangle. \tag{5.16}$$

Из (5.13) видно, что вектор α^j представляет собой координаты вектора a^j в базисе (5.6); из (5.14) следует, что

$$\Delta_j = \langle c_\sigma, \alpha^j \rangle - c_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{5.17}$$

Учитывая все это, получим общий вид симплексной таблицы:

	0	1	2	...	k	...	n
Δ	$\langle c, x^0 \rangle$	Δ_1	Δ_2	...	Δ_k	...	Δ_n
i_1	$x^0_{i_1}$	$\alpha_{i_1 1}$	$\alpha_{i_1 2}$	...	$\alpha_{i_1 k}$	...	$\alpha_{i_1 n}$
i_2	$x^0_{i_2}$	$\alpha_{i_2 1}$	$\alpha_{i_2 2}$	...	$\alpha_{i_2 k}$	...	$\alpha_{i_2 n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
s	x^0_s	α_{s1}	α_{s2}	...	α_{sk}	...	α_{sn}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i_m	$x^0_{i_m}$	$\alpha_{i_m 1}$	$\alpha_{i_m 2}$	...	$\alpha_{i_m k}$	...	$\alpha_{i_m n}$

Заметим, что если бы мы вместо матрицы $\bar{A}$ рассмотрели матрицу системы уравнений (5.9):

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & c_1 & c_2 & \ldots & c_n \\ b & 0 & a^1 & a^2 & \ldots & a^n \end{pmatrix},$$

то при умножении на B_σ^{-1} получили бы матрицу, элементы которой в точности соответствуют коэффициентам приведенной системы (5.1). При этом, однако, второй столбец этой матрицы, имеющий вид $\binom{1}{0}$, где $0 \in \mathbf{R}^m$, не несет никакой информации — он не меняется при смене базиса. Таким образом, его можно без ущерба удалить, что и было сделано.

Отметим также, что столбец α^j симплексной таблицы $\mathfrak{A}$ при $j \in \sigma$ является ортом пространства $\mathbf{R}^m$. В самом деле, как следует из (5.13), вектор α^j представляет собой координаты вектора a^j в базисе (5.6). При $j \in \sigma$ вектор a^j сам присутствует в системе (5.6).

В силу единственности разложения по базису имеем

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} 0, & j \in \sigma, \quad i \neq j, \\ 1, & j \in \sigma, \quad i = j. \end{cases}$$

2. Преобразование симплексной таблицы при смене базиса. Основная идея симплекс-метода состоит в том, чтобы искать новый опорный план x^1, базис которого отличался бы от базиса плана x^0 лишь одним вектором.

Пусть $s = i_l \in \sigma$,

$$\{a^{i_1}, a^{i_2}, \ldots, a^{i_{l-1}}, a^k, a^{i_{l+1}}, \ldots, a^{i_m}\} \qquad (5.18)$$

($k \notin \sigma$) — новый базис пространства $\mathbf{R}^m$. Тогда система векторов

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_{i_1} \\ a^{i_1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} c_{i_{l-1}} \\ a^{i_{l-1}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_k \\ a^k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_{i_{l+1}} \\ a^{i_{l+1}} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} c_{i_m} \\ a^{i_m} \end{pmatrix} \qquad (5.19)$$

является базисом пространства $\mathbf{R}^{m+1}$.

Обозначим через B_{σ^1} матрицу, составленную из этих векторов, тогда B_{σ^1} — квадратная $(m+1) \times (m+1)$-матрица, имеющая обратную.

Напомним (см. [1]), что *матрицей перехода* к новому базису называется матрица, столбцами которой являются координаты векторов нового базиса в их разложении по векторам старого.

Если v^r — единичный орт пространства $\mathbf{R}^{m+1}$, $r=0, 1, 2, \ldots, m$, то матрица перехода от базиса (5.10) к базису (5.19) имеет вид

$$\dot{Q} = \left(v^0, v^1, \ldots, v^{l-1}, \begin{pmatrix}\Delta_h \\ \alpha^h\end{pmatrix}, \quad v^{l+1}, \ldots, v^m\right).$$

При этом $B_{\sigma 1} = B_\sigma Q$. При указанной смене базиса любой вектор $y \in \mathbf{R}^{m+1}$, координаты которого в базисе (5.10) выражались вектором z, т. е. $y = B_\sigma z$, в новом базисе будет иметь координаты, описываемые вектором $\bar{z}$, который легко находится подстановкой $B_\sigma = B_{\sigma 1} Q^{-1}$: $y = B_{\sigma 1}\left(Q^{-1} z\right)$, т. е. $\bar{z} = Q^{-1} z$.

Следовательно, новые координаты столбцов матрицы $\mathfrak{A}$ выражаются формулами

$$\begin{pmatrix}\bar{\Delta}_j \\ \bar{\alpha}^j\end{pmatrix} = Q^{-1}\begin{pmatrix}\Delta_j \\ \alpha^j\end{pmatrix}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Обозначим матрицу, составленную из столбцов $\begin{pmatrix}\bar{\Delta}_j \\ \bar{\alpha}^j\end{pmatrix}$, через $\bar{\mathfrak{A}}$, т. е. $\bar{\mathfrak{A}} = Q^{-1}\mathfrak{A}$, или $Q\bar{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}$. Чтобы явно вычислить элементы матрицы $\bar{\mathfrak{A}}$, мы не станем указывать вид матрицы Q^{-1} (хотя это нетрудно), а поступим следующим образом.

Для строк матриц $\mathfrak{A}$ и $\bar{\mathfrak{A}}$ можно написать соотношения

$$\alpha_0 = \mathfrak{A}' v^0, \quad \alpha_i = \mathfrak{A}' v^r, \quad i \in \sigma, \quad i = i_r, \tag{5.20}$$

$$\bar{\alpha}_i = \bar{\mathfrak{A}}' v^r, \quad \bar{\alpha}_h = \bar{\mathfrak{A}}' v^l, \quad \bar{\alpha}_0 = \bar{\mathfrak{A}}' l^0, \quad i \in \sigma, \quad i \in i_r, \ i \neq s. \tag{5.21}$$

Тогда $\alpha_i - \bar{\alpha}_i = (\mathfrak{A}' - \bar{\mathfrak{A}}')v^r$ или

$$\alpha_i - \bar{\alpha}_i = \bar{\mathfrak{A}}'(Q' - I)v^r, \quad i = 0, \quad i \in \sigma, \quad i = i_r, \quad i \neq s, \tag{5.22}$$

где I — единичная $(m+1)\times(m+1)$-матрица. Из явного вида Q следует, что

$$(Q^l - I)\, y = \left(\left\langle y, \begin{pmatrix}\Delta_h \\ \alpha^h\end{pmatrix}\right\rangle - y_l\right) v^l \tag{5.23}$$

для любого $y = (y_0, y_1, \ldots, y_l, \ldots, y_m)$.

В частности,

$$(Q'-I)v^r = \alpha_{ik}v^t, \qquad i = i_r, \quad r \neq t, \tag{5.24}$$

$$(Q'-I)v^t = (\alpha_{sk}-1)v^t, \tag{5.25}$$

$$(Q'-I)v^0 = \alpha_{0k}v^t. \tag{5.26}$$

Используя (5.22) и (5.25), получаем

$$\alpha_s - \bar{\alpha}_h = (\alpha_{sk}-1)\bar{\mathfrak{A}}'v^t = (\alpha_{sk}-1)\bar{\alpha}_h,$$

откуда

$$\bar{\alpha}_h = \frac{1}{\alpha_{sh}}\alpha_s. \tag{5.27}$$

Из (5.22), (5.24) и (5.27) имеем

$$\alpha_i - \bar{\alpha}_i = \alpha_{ik}\bar{\mathfrak{A}}'v^t = \bar{\alpha}_{ik}\alpha_k = \frac{\alpha_{ik}}{\alpha_{sk}}\alpha_s,$$

т. е.

$$\bar{\alpha}_i = \alpha_i - \frac{\alpha_{ik}}{\alpha_{sk}}\alpha_s. \tag{5.28}$$

В частности, из (5.26)

$$\bar{\alpha}_0 = \alpha_0 - \frac{\alpha_{0k}}{\alpha_{sk}}\alpha_s. \tag{5.29}$$

Очевидно, что $\alpha_{sk} \neq 0$, так как в противном случае матрица Q вырождена, т. е. (5.18) — не базис.

Смысл преобразований (5.27)—(5.29) ясен: к i-й строке матрицы $\mathfrak{A}$ прибавляется строка α_s с таким коэффициентом $-\alpha_{ik}/\alpha_{sk}$, чтобы элемент $\bar{\alpha}_{ik}$ стал равен $\underline{0}$, после чего строку α_s делим на α_{sk}, добиваясь равенства $\bar{\alpha}_{kk} = 1$. В результате столбец $\begin{pmatrix}\bar{\Delta}_k \\ \bar{\alpha}^k\end{pmatrix}$ в матрице $\bar{\mathfrak{A}}$ оказывается ортом v^t пространства $\mathbf{R}^{m+1}$, как и должно быть в симплексной таблице, так как вектор a^k теперь уже входит в базис и занимает в нем место с номером t.

3. Теория и правила симплекс-метода. Особую роль в симплексной таблице играет первая строка α_0. Для выяснения этой роли рассмотрим задачу, двойственную к (5.2):

$$\begin{gathered}\min\langle b,\ p\rangle \\ A'p \geqslant c,\end{gathered} \tag{5.30}$$

где $p = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$.

Сопоставим базису (5.6) опорного плана x^0 задачи (5.2) m-мерный вектор p^0 по формуле $p^0 = (A'_\sigma)^{-1} c_\sigma$, где $c_\sigma = (c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_m})$.

Тогда $A'_\sigma p^0 = c_\sigma$, откуда, используя (5.17) для $\alpha_{0j} = \Delta_j$, получаем $\Delta_j = \langle A'_\sigma p^0, \alpha^j \rangle - c_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Используя известное свойство скалярного произведения $\langle A'_\sigma p^0, \alpha^j \rangle = \langle p^0, A_\sigma \alpha^j \rangle$ и (5.13), получаем $\Delta_j = \langle p^0, a^j \rangle - c_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$. В матричной форме данная система равенств принимает вид $\Delta = A' p^0 - c$. Отсюда вытекает важная характеристика элементов Δ_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, первой строки симплексной таблицы: вектор $\Delta = (\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n)$ неотрицателен тогда и только тогда, когда вектор p^0 является планом задачи (5.30). Отметим еще одно свойство вектора p^0:

$$\langle b, p^0 \rangle = \langle b, (A'_\sigma)^{-1} c_\sigma \rangle = \langle A_\sigma^{-1} b, c_\sigma \rangle = \langle x_\sigma^0, c_\sigma \rangle.$$

Воспользовавшись равенством (5.18), окончательно получаем

$$\langle b, p^0 \rangle = \langle c, x^0 \rangle. \tag{5.31}$$

Опираясь на сказанное выше, сформулируем следующую теорему.

Теорема 5.4. *Если вектор* $\Delta = (\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n)$ *неотрицателен, то начальный опорный план* x^0 *оптимален для задачи* (5.2); *вектор* p^0 — *оптимальный план задачи* (5.30).

Доказательство. Из неотрицательности вектора Δ следует, что вектор $A' p^0 - c$ также неотрицателен. Т. е., как отмечено выше, p^0 — план задачи (5.30). Поскольку x^0 и p^0 удовлетворяют равенству (5.31), то к ним можно применить достаточное условие оптимальности (см. лемму 3.2).

Таким образом, по внешнему виду симплексной таблицы можно легко установить оптимальность опорного плана x^0. Кроме этого оказывается, что условие теоремы 5.4 $\Delta \geqslant 0$ является не только достаточным, но и необходимым условием оптимальности — если среди чисел Δ_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, имеются отрицательные, то существует план x^1 задачи (5.2), для которого $\langle c, x^1 \rangle > \langle c, x^0 \rangle$. Обоснованием этого утверждения является процедура симплекс-метода построения плана x^1.

Правило 1. *Если* $\Delta_k < 0$, *то вектор* a^k *вводится в базис (если неравенство* $\Delta_j < 0$ *выполняется для несколь-*

ких j, то в качестве индекса k можно взять произвольный из них).

Обратим внимание на то, что если $\Delta_k < 0$, то столбец a^k матрицы A не входит в базис (5.6) опорного плана x^0. Действительно, по определению вектора p^0, если $j \in \sigma$, то $\langle a^j, p^0 \rangle = c_j$, т. е. $\Delta_j = 0$.

Правило 1 не уточняет, какой вектор a^s нужно выводить из базиса (5.6) (ведь базис не может содержать более m векторов). Если вывести из системы векторов (5.6) произвольный столбец, то может оказаться, что вектор, соответствующий новому базису, удовлетворяет уравнению $Ax = b$, но имеет отрицательные координаты и поэтому не является планом. Уточнением правила 1 в этом смысле является правило 2.

Правило 2. *Если вектор a^k решено ввести в базис (т. е. $\Delta_k < 0$), то нужно рассмотреть столбец α^k симплексной таблицы и выбрать те индексы $i \in \sigma$ строк, для которых $\alpha_{ik} > 0$. Затем следует составить отношения x_i^0/α_{ik} для всех таких i. Пусть*

$$\theta = \min_{\alpha_{ik} > 0} \frac{x_i^0}{\alpha_{ik}}, \qquad i \in \sigma,$$

и индекс $s \in \sigma$ таков, что $x_s^0/\alpha_{sk} = \theta$, тогда вектор a^s выводится из базиса.

Может случиться, что правило 2 применить нельзя: в столбце α^k все числа α_{ik} неположительны, в этом случае решение задачи (5.2) следует прекратить, так как имеет место следующая теорема.

Теорема 5.5. *Если $\Delta_k < 0$ и $\alpha^k \leqslant 0$, то задача* (5.2) *не имеет решения (в этом случае целевая функция $\langle c, x \rangle$ неограничена на множестве планов).*

Доказательство. Пусть γ — произвольное положительное число.

Рассмотрим вектор $x(\gamma) = (x_1(\gamma), x_2(\gamma), \ldots, x_n(\gamma))$, где

$$x_j(\gamma) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad j \notin \sigma, \quad j \neq k, \\ x_j^0 - \gamma\alpha_{jk}, & \text{если} \quad j \in \sigma, \\ \gamma, & \text{если} \quad j = k. \end{cases}$$

Из структуры вектора $x(\gamma)$ видно, что

$$Ax(\gamma) = \sum_{j \in \sigma} (x_j^0 - \gamma\alpha_{jk})\, a^j + \gamma a^k,$$

т. е.

$$Ax(\gamma) = A_\sigma x_\sigma^0 - \gamma A_\sigma \alpha^k + \gamma a^k.$$

Из (5.13) следует, что $A_\sigma \alpha^k = a^k$. Следовательно, $Ax(\gamma) = b$. Учитывая, что $\gamma > 0$, $x_j^0 \geqslant 0$, $\alpha_{jk} \leqslant 0$, $j \in \sigma$, получаем $x(\gamma) \geqslant 0$. Таким образом, $x(\gamma)$ — план задачи (5.2), кроме того

$$\langle c, x(\gamma)\rangle = \langle c_\sigma, x_\sigma^0 - \gamma\alpha^k\rangle + \gamma c_k = \langle c_\sigma, x_\sigma^0\rangle - \gamma\langle c_\sigma, \alpha^k\rangle + \gamma c_k.$$

Учитывая (5.17) для Δ_j при $j = k$, получаем, что $\langle c, x(\gamma)\rangle = \langle c, x^0\rangle - \gamma\Delta_k$. Отсюда видно, что, так как $\Delta_k < 0$, то с ростом γ значение $\langle c, x(\gamma)\rangle$ неограниченно растет.

Таким образом, если задача (5.2) имеет решение и вектор x^0 не является оптимальным планом, то можно применять последовательно правила 1 и 2. При этом, однако, надо быть уверенным в том, что система векторов (5.18), которая образована согласно этим правилам выбора индексов k и s, является базисом. С учетом того, что $\alpha_{sk} \neq 0$, этот факт вытекает из следующего утверждения.

Лемма 5.1. *Пусть $\{a^1, a^2, \ldots, a^m\}$ — базис пространства $\mathbf{R}^m$, $a^k \in \mathbf{R}^m$ — произвольный вектор: $a^k = \sum_{r=1}^{m} \alpha_r a^r$. Если коэффициент α_s, $1 \leqslant s \leqslant m$, отличен от нуля, то система векторов $\{a^1, a^2, \ldots, a^{s-1}, a^k, a^{s+1}, \ldots, a^m\}$ также является базисом пространства $\mathbf{R}^m$.*

Доказательство. Так как в предполагаемом базисе m векторов, то для доказательства леммы надо лишь убедиться, что любой вектор y пространства $\mathbf{R}^m$ выражается как линейная комбинация этих векторов. Это очевидно, так как вектор y выражается через базис $\{a^1, a^2, \ldots, a^m\}$, а вектор a^s этого базиса выражается через векторы нового базиса:

$$a^s = \frac{1}{\alpha_s}\left(a^k - \sum_{r \neq s} \alpha_r a^r\right).$$

Осуществим переход к новому базису (5.18), применив формулы (5.27)—(5.29).

Обозначим

$$\sigma^1 = \{i_1, i_2, \ldots, i_{t-1}, k, i_{t+1}, \ldots, i_m\}.$$

Положим $x^1 = (x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1)$, где

$$x_j^1 = \begin{cases} 0, & \text{если } j \notin \sigma^1, \\ \overline{\alpha}_{j0}, & \text{если } j \in \sigma^1. \end{cases} \qquad (5.32)$$

По построению $x_{\sigma^1}^1 = \overline{\alpha}^0$. Если обозначить

$$c_{\sigma^1} = (c_{i_1}, \ldots, c_{i_{l-1}}, c_k, c_{i_{l+1}}, \ldots, c_{i_m}),$$

$$A_\sigma = (a^{i_1}, \ldots, a^{i_{l-1}}, a^k, a^{i_{l+1}}, \ldots, a^{i_m}),$$

то, очевидно, $Ax^1 = A_{\sigma^1} x_{\sigma^1}^1$, $\langle c, x^1 \rangle = \left\langle c_{\sigma^1}, x_{\sigma^1}^1 \right\rangle$.

Теорема 5.6. *Вектор x^1 является опорным планом задачи* (5.2), *причем*

$$\langle c, x^1 \rangle = \langle c, x^0 \rangle - \frac{x_s^0}{\alpha_{sk}} \Delta_k.$$

Матрица $\overline{\mathfrak{A}}$ служит симплексной таблицей опорного плана x^1.

Доказательство. Так как $x_{\sigma^1}^1 = \overline{\alpha}^0$, то этот вектор представляет собой координаты вектора b в базисе (5.18), поэтому $b = A_{\sigma^1}\overline{\alpha}^0 = A_{\sigma^1} x_{\sigma^1}^1 = Ax^1$. Очевидно, что $x^1 \geqslant 0$ тогда и только тогда, когда $\overline{\alpha}^0 \geqslant 0$. По формулам (5.27) и (5.28) имеем

$$\overline{\alpha}_{k0} = \frac{1}{\alpha_{sk}} \alpha_{s0}, \quad \overline{\alpha}_{i0} = \alpha_{i0} - \frac{\alpha_{ik}}{\alpha_{sk}} \alpha_{s0} \text{ при } i \in \sigma, \ i \neq s.$$

Так как $\alpha_{i0} \geqslant 0$, $i \in \sigma$, $\alpha_{sk} > 0$ по правилу 2, то $\overline{\alpha}_{k0} \geqslant 0$. Для того чтобы убедиться в неотрицательности вектора $\overline{\alpha}^0$, осталось проверить выполнение неравенств

$$\alpha_{i0} \geqslant \frac{\alpha_{ik}}{\alpha_{sk}} \alpha_{s0} \text{ при } i \in \sigma, \ i \neq s.$$

Если индекс i таков, что $\alpha_{ik} \leqslant 0$, то данное неравенство очевидно. Если же $\alpha_{ik} > 0$, то требуемое неравенство эквивалентно условию $\alpha_{i0}/\alpha_{ik} \geqslant \alpha_{s0}/\alpha_{sk}$, которое выполнено в силу выбора индекса s.

Из построения вектора x^1 вытекает, что x^1 — опорный план. Отсюда же следует и то, что $\overline{\mathfrak{A}}$ — симплексная таблица этого вектора. Утверждение теоремы о значении $\langle c, x^1 \rangle$ получается из формулы (5.29), так как $\overline{\alpha}_0 = \langle c, x^1 \rangle$.

Следствие. *Если опорный план x^0 невырожден, то* $\langle c, x^1 \rangle > \langle c, x^0 \rangle$.

Действительно, при указанном предположении справедливо, что $x_s^0 > 0$, и так как $\Delta_k < 0$, $\alpha_{sk} > 0$, то все это вместе и дает нужное неравенство.

4. Вычислительная схема симплекс-метода. В этом разделе излагается схема, описывающая последовательность вычислительных процедур симплекс-метода. Однако данное изложение не служит руководством для программиста, а лишь дает общее представление без указания многочисленных специфических приемов, помогающих наиболее эффективно использовать возможности ЭВМ.

Пусть имеется начальная симплексная таблица $\mathfrak{A}$.

Этап 1. Проверяем выполнение неравенств $\Delta_j \geqslant 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Если эти неравенства справедливы, то план x^0, вычисляемый по формуле (5.8),— оптимален. В противном случае ищем индекс k, $1 \leqslant k \leqslant n$, такой, что $\Delta_k < 0$.

Этап 2. Проверяем выполнение неравенства $\alpha^k \leqslant 0$. Если все координаты α_{ik} вектора α^k неположительны, то вычисления прекращаются, так как в этом случае задача (5.2) не имеет решения. В противном случае ищем такой индекс s, что $\alpha_{sk} > 0$ и $\alpha_{s0}/\alpha_{sk} \leqslant \alpha_{i0}/\alpha_{ik}$ для всех i таких, что $\alpha_{ik} > 0$.

Этап 3. По формулам (5.27)—(5.29) строим новую симплексную таблицу $\overline{\mathfrak{A}}$, которую принимаем за начальную, и возвращаемся к этапу 1.

Последовательное выполнение этапов 1—3 называется *итерацией симплекс-метода*.

Подчеркнем основные особенности симплекс-метода:

а) Конечность (которую мы доказали пока лишь для невырожденной задачи). Как следует из следствия к теореме 5.8, значение линейной формы возрастает в результате каждой итерации. Следовательно, последовательность x^0, x^1, ... опорных планов, соответствующая последовательности итераций, состоит из различных векторов. Каждый опорный план x^0, x^1, ... отвечает крайней точке многогранника X планов задачи (5.2). Поскольку всех крайних точек — конечное число, то возможен один из двух исходов: либо на очередной итерации будет установлена неограниченность линейной формы $\langle c, x\rangle$ на множестве X, либо через конечное число итераций будет найден оптимальный план.

б) Все вычисления симплекс-метода совершаются либо сравнением элементов симплексной таблицы с нулем (этапы 1 и 2), либо вычислением по формулам этапа 3. В этом состоит главное достоинство симплекс-метода: при решении практических задач число необходимых итераций оказывается довольно большим, поэтому то время, которое ЭВМ тратит на выполнение одной итерации, играет весьма существенную роль.

§ 4. Вырожденные задачи линейного программирования

1. Рассмотрим ситуации, когда задача (5.2) может обладать вырожденными опорными планами. В этом случае в ходе симплекс-процедуры возникают трудности, которые, однако, можно преодолеть.

Если ранг матрицы A меньше m, то все опорные планы задачи (5.2) — вырожденные. Эту ситуацию, однако, можно исключить (это будет показано в § 5 при описании способа нахождения начального опорного плана). Однако и в том случае, когда ранг матрицы A равен m, задача (5.2), как видно из примера (5.5), может обладать вырожденными опорными планами. В этом параграфе предполагаем, что ранг матрицы A ограничений задачи (5.2) равен m.

Пусть начальный опорный план имеет лишь $l < m$ положительных координат: $x^0_{i_r} > 0$, $r = 1, 2, \ldots, l$, $x^0_i = 0$, если $i \neq i_r$, $r = 1, 2, \ldots, l$, и $\{a^{i_1}, a^{i_2}, \ldots, a^{i_l}, a^{i_{l+1}}, \ldots$ $\ldots, a^{i_m}\}$ — какой-то его базис.

Имея начальную симплексную таблицу $\mathfrak{A}$, соответствующую данному базису плана x^0, можно осуществить все три этапа симплекс-метода, как они описаны в п. 4 § 3. При этом для получившегося нового опорного плана x^1 будут выполнены все утверждения теоремы 5.6. Однако получить следствие из этой теоремы не удается, поскольку может случиться, что выбор индекса s согласно правилу 2 окажется таким, что $x^0_s = 0$. Тогда новый опорный план x^1, определяемый по формулам (5.27) и (5.28), совпадает с планом x^0, и вся итерация сводится к тому, что вместо базиса (5.6) для плана x^0 выбирается базис (5.18). При этом значение целевой функции, естественно, не увеличивается: $\langle c, x^1 \rangle = \langle c, x^0 \rangle$.

Однако можно продолжать вычисления с вектором x^1 и новым базисом, надеясь, что в ходе очередной итерации удастся увеличить значение целевой функции. Но в данном случае может возникнуть следующая трудность: вычислив в процессе нескольких итераций планы x^0, x^1, $\ldots$ $\ldots$, x^q, которые совпадают с планом x^0 и отличаются друг от друга лишь выбором базиса, на очередной итерации можем получить в качестве нового опорного плана тот же вектор x^0 с исходным набором векторов (5.6) в качестве базиса.

Имеются примеры, в которых указанная возможность осуществляется. В этом случае, говорят, что произошло зацикливание: хотя задача (5.2) имеет решение и план x^0 не является оптимальным, тем не менее симплекс-метод, как он описан в § 2, может «зациклиться» на векторе x^0, бесконечно перебирая один и тот же набор разных базисов.

На основе всего практического опыта применения симплекс-метода для исследования моделей реальных явлений сложилось убеждение, что вероятность зацикливания ничтожно мала. Несмотря на это, были приняты меры для полного предотвращения этой ситуации.

Разработаны различные модификации основной процедуры симплекс-метода, позволяющие избежать зацикливания. Одна из подобных модификаций основана на том соображении, что вырожденность задачи обусловлена неудачным расположением вектора b правой части ограничений задачи (5.2) в конусе, натянутом на векторы $\{a^1, a^2, \ldots, a^n\}$ (см. рис. 5.2 к задаче (5.5)). Чтобы ликвидировать это неудачное расположение, нужно несколько сместить вектор b, заменив его на специально подобранный вектор $b(\varepsilon)$, в результате чего задача (5.2) станет невырожденной.

Не останавливаясь подробно на этом приеме, опишем другой подход к решению проблемы зацикливания.

2. Введем понятие лексикографической упорядоченности в пространстве $\mathbf{R}^{n+1}$.

Пусть $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$. Будем говорить, что вектор α *лексикографически больше нулевого вектора* $0 \in \mathbf{R}^{n+1}$ ($\alpha \succ 0$), если $\alpha \neq 0$ и первая ненулевая координата вектора α положительна, т. е. $\alpha_q > 0$, где $q = \min\{j \mid \alpha_j \neq 0\}$.

Если $\alpha' = (\alpha_0', \alpha_1', \ldots, \alpha_n')$, то будем говорить, что вектор α *лексикографически больше* α' ($\alpha \succ \alpha'$), если $\alpha - \alpha' \succ 0$. Другими словами, $\alpha \succ \alpha'$, если $\alpha \neq \alpha'$ и $\alpha_q > \alpha_q'$, где $q = \min\{j \mid \alpha_j \neq \alpha_j'\}$.

Отметим два важных свойства отношения $\succ$:

а) для любых двух векторов $\alpha, \alpha' \in \mathbf{R}^{n+1}$ имеет место одна из трех возможностей: $\alpha = \alpha'$, $\alpha \succ \alpha'$, $\alpha' \succ \alpha$;

б) отношение $\succ$ транзитивно, т. е. если $\alpha \succ \alpha'$, $\alpha' \succ \alpha''$, то $\alpha \succ \alpha''$.

Для того чтобы сделать невозможным зацикливание, надо после выбора (по правилу 1) вектора a^k, который вводится в базис, более скрупулезно выбирать тот вектор, который будет выведен из базиса (если правило 2 неоднозначно определяет его).

С этой целью усилим требования на рассматриваемые в симплекс-методе опорные планы.

Определение 5.5. Будем говорить, что опорный план x^0 *строго допустим*, если все строки α_i, $i \in \sigma$, (кроме строки α_0) симплекс таблицы, соответствующий плану x^0, лексикографически больше нуля: $\alpha_i \succ 0$, $i \in \sigma$.

Понятно, что если план x^0 невырожден, то он строго допустим — в каждом векторе α_i, $i \in \sigma$, первая координата $\alpha_{i0} = x_i^0 > 0$ положительна.

Будем считать, что начальный опорный план x^0 строго допустим.

Правило 2'. *Если вектор a^k решено ввести в базис (т. е. $\Delta_k < 0$), то следует рассмотреть k-й столбец α^k симплекс-таблицы и все строки α_i, для которых $\alpha_{ik} > 0$. Индекс s выбирается таким, чтобы*

$$\frac{1}{\alpha_{sk}}\alpha_s \prec \frac{1}{\alpha_{ik}}\alpha_i, \quad s, i \in \sigma, \quad \alpha_{sk} > 0, \quad \alpha_{ik} > 0, \quad (5.33)$$

и вектор a^s выводится из базиса.

Правило 2' не оставляет никакого произвола в выборе индекса s, указывающего, какой вектор a^s следует выводить из базиса. Другими словами, среди векторов α_i/α_{ik} имеется ровно один минимальный в смысле отношения $\succ$. В самом деле, все векторы a_i, $i \in \sigma$, линейно независимы, так как ранг матрицы $\mathfrak{A}$ равен рангу матрицы A, т. е. числу m строк.

Если предположить, что имеются два лексикографически минимальных вектора α_s/α_{sk} и α_t/α_{tk}, то это означает, что $\alpha_s/\alpha_{sk} = \alpha_t/\alpha_{tk}$, что противоречит линейной независимости векторов α_s и α_t.

Теорема 5.7. *Если действовать по правилу 2', то новый опорный план x^1 строго допустим (т. е. $\bar{\alpha}_i \succ 0$, $i \in \sigma^1$) и $\bar{\alpha}_0 \succ \alpha_0$.*

Доказательство. Так как $\alpha_{sk} > 0$, $\alpha_s \succ 0$, то $\bar{\alpha}_k = \alpha_s/\alpha_{sk} \succ 0$ (используя (5.27)—(5.29)). Если индекс i таков, что $\alpha_{ik} \leqslant 0$, то очевидно $\alpha_s\alpha_{ik}/\alpha_{sk} \prec 0$ и $\bar{\alpha}_i \succ \alpha_i \geqslant 0$.

Если же $\alpha_{ik} > 0$, то согласно правилу 2^l $\alpha_i/\alpha_{ik} > \alpha_s/\alpha_{sk}$, откуда $\bar{\alpha}_i/\alpha_{ik} > 0$, т. е. $\bar{\alpha}_i > 0$. При этом $\bar{\alpha}_0 = \alpha_0 - \Delta_k\alpha_s/\alpha_{sk} > \alpha_0$, так как $\Delta_k/\alpha_{sk} < 0$, $\alpha_s > 0$.

Теорема 5.7 утверждает, что если начать вычисления со строго допустимого опорного плана x^0, то на каждой итерации мы будем получать вновь строго допустимый опорный план, и при этом исключается возможность зацикливания. В самом деле, пусть в процессе итеративного применения симплекс-метода возникает последовательность строго допустимых планов $x^0, x^1, \ldots, x^q, \ldots$ Тогда, по теореме 5.7 $\alpha_0^{(0)} \prec \alpha_0^{(1)} \prec \ldots \prec \alpha_0^{(q)} \prec \ldots$ Поскольку отношение $\succ$ транзитивно, то $\alpha_0^{(0)} \prec \alpha_0^{(q)}$, а это означает, что $x^q \neq x^0$ ни при каком q — зацикливание невозможно.

§ 5. Нахождение начального опорного плана

Основная процедура симплекс-метода, описанная в двух предыдущих параграфах, применима лишь в том случае, когда имеется начальный опорный план x^0 и его базис $a^{i_1}, a^{i_2}, \ldots, a^{i_m}$. Отыскание начального плана x^0 состоит в нахождении неотрицательного решения системы уравнений (5.2): $Ax = b$, $x \geqslant 0$. Важная особенность симплекс-метода состоит в том, что решение этой проблемы также возможно осуществить с помощью основной процедуры симплекс-метода.

Не ограничивая общности будем предполагать, что все координаты вектора b — правой части ограничений задачи (5.2) — неотрицательны: $b \geqslant 0$. В самом деле, если какая-то координата b_i отрицательна, то достаточно умножить соответствующее уравнение $\langle a_i, x\rangle = b_i$ на -1.

Итак, считая, что $b \geqslant 0$, рассмотрим каноническую задачу линейного программирования с $n+m$ переменными:

$$\max(-v_1 - v_2 - \ldots - v_m)$$

$$\begin{aligned}
v_1 &+ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1,\\
v_2 &+ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
v_m &+ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m,
\end{aligned} \tag{5.34}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n; \quad v_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Исследуем связь между задачами (5.2) и (5.34). Задача (5.34) является допустимой: легко видеть, что вектор

$(b_1, b_2, \ldots, b_m, 0, 0, \ldots, 0)$ удовлетворяет всем ограничениям. Кроме того, целевая функция этой задачи ограничена сверху числом 0. Таким образом, согласно теореме 3.1 дадача (5.34) имеет решение. Пусть d — значение задачи (5.34). Возможны два случая: $d=0$, $d<0$.

Теорема 5.8. *Если значение d задачи* (5.34) *равно* 0, *то задача* (5.2) *допустима. Если $d<0$, то задача* (5.2) *недопустима.*

Доказательство. Пусть задача (5.2) допустима и $x^0=\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$ — ее план. В таком случае очевидно, что $n+m$-мерный вектор $\tilde{x}=\left(0, 0, \ldots, 0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$ удовлетворяет всем ограничениям задачи (5.34), т. е. является ее планом; при этом значение целевой функции этой задачи на плане $\tilde{x}$ равно 0. Отсюда вытекает, что план $\tilde{x}$ оптимален для (5.34), и $d=0$. С другой стороны, если $d=0$, то для любого решения $(v_1, v_2, \ldots$ $\ldots, v_m, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ задачи (5.34) $v_1=v_2=\ldots=v_m=0$ и, следовательно, вектор $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — план задачи (5.2).

Из доказанной теоремы следует, что в результате решения вспомогательной задачи (5.34) будет либо найден план задачи (5.2), либо выяснится, что система ограничений задачи (5.2) противоречива, т. е. задача несовместна.

Основная особенность задачи (5.34) состоит в том, что для нее можно сразу указать начальный опорный план. Действительно, вектор $(b, 0)=(b_1, b_2, \ldots, b_m, 0, 0, \ldots, 0)$ удовлетворяет всем ограничениям этой задачи, а система единичных векторов $v^1, v^2, \ldots, v^m$ пространства $\mathbf{R}^m$ является его базисом. Нетрудно убедиться, что $(b, 0)$ — строго допустимый план. Действительно,

$$\alpha_{10}=(b_1, 1, 0, \ldots, a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}),$$

$$\alpha_{20}=(b_2, 0, 1, \ldots, 0, a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}),$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\alpha_{m0}=(b_m, 0, 0, \ldots, 1, a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}).$$

Поскольку $b_i \geqslant 0$, $i=1, 2, \ldots, m$, то первая ненулевая координата в каждом векторе α_i положительна, т. е. $\alpha_i \succ \succ 0$, $i=1, 2, \ldots, m$.

Ранг матрицы ограничений задачи (5.34) равен, очевидно, m, поэтому, несмотря на то, что эта задача может быть вырожденной, к ней можно применить уточненную процедуру симплекс-метода с правилом $2'$.

Следует также отметить, что на первой итерации решения задачи (5.34) нет необходимости решать системы уравнений с целью определить значения α_{ij}, $j=1, 2, \ldots$ $\ldots, n$, поскольку в данном случае эти числа просто совпадают с координатами векторов a^j: $\alpha_{ij}=a_{ij}$, $i=1, 2, \ldots$ $\ldots, m$, $j=1, 2, \ldots, n$.

Если задача (5.2) допустима, то процесс решения задачи (5.34) заканчивается нахождением вектора вида $(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)$ размерности $n+m$. Поскольку вычисления были начаты с опорного строго допустимого плана $(b, 0)$, то по свойству симплекс-метода полученное решение также будет опорным строго допустимым планом. Сам процесс решения состоит в последовательном исключении из базисов получающихся опорных планов векторов v^i и их замещении векторами $a^{i_1}, a^{i_2}, \ldots, a^{i_l}$. При этом векторы $a^{i_1}, a^{i_2}, \ldots, a^{i_l}$ будут линейно независимыми как часть базиса опорного плана.

В случае невырожденной задачи (5.2) необходимо будет $l=m$. В противном случае может случиться, что $l<m$, а это, в частности, означает, что в базисе опорного плана x^0, возникшем в ходе решения задачи (5.34), кроме векторов $a^{i_1}, a^{i_2}, \ldots, a^{i_l}$ могут присутствовать некоторые векторы v^i. Поскольку процедура симплекс-метода требует, чтобы при решении задачи (5.2) в базисе начального опорного плана x^0 присутствовали только вектор-столбцы матрицы A, то в момент перехода от задачи (5.34) к задаче (5.2) требуется принять меры к исключению векторов v^i из базиса опорного плана x^0, если они там содержатся.

Возможны два случая.

1) Если ранг матрицы A равен m, то всегда можно вывести все векторы v^i из базиса опорного плана x^0, поскольку любая линейно независимая система из m столбцов матрицы A является базисом пространства $\mathbf{R}^m$. Укажем, как это можно сделать.

Пусть базис плана x^0 кроме векторов $a^{i_1}, a^{i_2}, \ldots, a^{i_l}$ содержит векторы $v^1, v^2, \ldots, v^{m-l}$. Рассмотрим разложение для j-го столбца матрицы A по этому базису:

$$a^j=\sum_{r=1}^{l}\alpha_{rj}a^{i_r}+\sum_{i=1}^{m-l}\beta_{ij}v^i. \tag{5.35}$$

Если бы для каждого j, $l+1\leqslant j\leqslant n$, все числа β_{ij}, $1\leqslant i\leqslant$ $\leqslant m-l$, оказались равными нулю, то всякий столбец a^j

матрицы A выражался бы через столбцы a^{i_r}, $r=1, 2, \ldots, l$, что невозможно, поскольку ранг матрицы A равен $m>l$. Следовательно, найдутся индекс k, $l+1 \leqslant k \leqslant n$, и индекс s, $1 \leqslant s \leqslant m-l$, такие, что $\beta_{sk} \neq 0$. Как следует из леммы 5.1, это означает, что вектор a^k можно ввести в базис вместо вектора v^s, используя процедуру симплекс-метода. При этом опорный план x^0 не изменится. В самом деле, определяя число θ по правилу 2 (или по правилу 2′), получаем $\theta=0$, так как $x_k^0=0$ (ненулевые координаты вектора x^0 соответствуют столбцам a^{i_r}, $r=1, 2, \ldots, l$, но не v^i). Указанная процедура позволяет составить базис опорного плана x^0, состоящий из m вектор-столбцов матрицы A.

2) Пусть ранг матрицы A равен h, $l \leqslant h < m$. Тогда процедуру, описанную в предыдущем пункте, можно осуществлять до тех пор, пока в базисе опорного плана окажется ровно h вектор-столбцов матрицы A. Пусть это будут, например, столбцы $a^1, a^2, \ldots, a^h$. В таком случае, любой столбец a^j матрицы A допускает представление в виде линейной комбинации векторов a^i, $i=1, 2, \ldots, h$. В силу единственности разложения по базису пространства $\mathbf{R}^m$, в формуле (5.35), где следует положить $l=h$, все числа β_{ij}, $i=1, 2, \ldots, m-l$, $j=1, 2, \ldots, n$, равны нулю.

Покажем, что в этом случае все ограничения задачи (5.2) с номерами $i=l+1, l+2, \ldots, m$ — «лишние», т. е. что уравнение $\langle a_i, x\rangle=b_i$ при $l+1 \leqslant i \leqslant m$ является следствием первых l уравнений — ограничений задачи (5.2). Действительно, векторы $a^1, a^2, \ldots, a^l, v^{l+1}, \ldots, v^m$ составляют базис пространства $\mathbf{R}^m$. Поэтому определитель, составленный из координат этих векторов, отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1l} & 0 & 0 \ldots 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots a_{2l} & 0 & 0 \ldots 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \ldots a_{ll} & 0 & 0 \ldots 0 & 0 \\ a_{l+1\,1} & a_{l+1\,2} & \ldots a_{l+1\,l} & 1 & 0 \ldots 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots a_{ml} & 0 & 0 \ldots 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Следовательно, векторы $\tilde{a}_1=(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1l})$, $\tilde{a}_2=(a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2l}), \ldots, \tilde{a}_l=(a_{l1}, a_{l2}, \ldots, a_{ll})$ линейно независимы, т. е. они образуют базис пространства $\mathbf{R}^l$, а векторы $\tilde{a}_i=(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{il})$, $l+1 \leqslant i \leqslant m$, через них выражаются. Пусть $\tilde{a}_i = \sum_{r=1}^{l} \gamma_{ri} \tilde{a}_r$, $l+1 \leqslant i \leqslant m$, или

$$a_{ij} = \sum_{r=1}^{l} \gamma_{ri} a_{rj}, \qquad j = 1, 2, \ldots, l. \tag{5.36}$$

Кроме этого, при $j > l$ из (5.35) получаем

$$a_{ij} = \sum_{h=1}^{l} \alpha_{hj} a_{ih} \tag{5.37}$$

для всех i. При $l+1 \leqslant i \leqslant m$, воспользовавшись формулой (5.36) и подставив в полученную формулу выражение для a_{ih}, получим

$$a_{ij} = \sum_{h=1}^{l} \alpha_{hj} \sum_{r=1}^{l} \gamma_{ri} a_{rh}, \qquad j = l+1, l+2, \ldots, n,$$

или

$$a_{ij} = \sum_{r=1}^{l} \gamma_{ri} \sum_{h=1}^{l} \alpha_{hj} a_{rh} = \sum_{r=1}^{l} \gamma_{ri} a_{rj}. \tag{5.38}$$

При выводе формулы (5.38) мы воспользовались формулой (5.37).

Окончательно имеем (см. (5.36) и (5.38))

$$a_{ij} = \sum_{r=1}^{l} \gamma_{rj} a_{rj}, \qquad j = 1, 2, \ldots, l, l+1, \ldots, n.$$

Это означает, что $a_i = \sum_{r=1}^{l} \gamma_{ri} a_r$, т. е. при $l+1 \leqslant i \leqslant m$ i-я строка матрицы A является линейной комбинацией ее первых l строк. Если задача (5.2) допустима, то это значит, что все строки матрицы A с номерами, большими l, можно отбросить, и допустимое множество задачи (5.2) не изменится.

Несмотря на то что в целях удобства обозначений мы считали, что базис начального опорного плана x^0 состоит из нескольких первых столбцов матрицы A и последних единичных векторов пространства $\mathbf{R}^m$, ясно, что справедлив общий вывод: если некоторые векторы v^i не удалось вывести из базиса опорного плана x^0, полученного в результате решения задачи (5.34), то ограничения задачи (5.2), номера которых соответствуют индексам оставшихся векторов v^i, можно отбросить, у получившейся при этом матрицы число строк будет равно ее рангу.

Таким образом, решение вспомогательной задачи (5.34) не только позволяет найти начальный опорный план задачи (5.2), но и дает возможность выявить линейно независимые ограничения этой задачи.

После этого можно применять симплекс-метод для случая, когда ранг матрицы A совпадает с числом ее строк.

Симплекс-таблица, возникающая на последней итерации поиска начального опорного плана, позволяет сразу написать начальную симплекс-таблицу решения основной задачи (5.2) — надо лишь отбросить столбцы $v^1, v^2, \ldots, v^m$, соответствующие вспомогательным переменным $v_1, v_2, \ldots$ $\ldots, v_m$, и заменить нулевую строку строкой Δ, элементы которой нужно вычислить по формулам (5.17).

§ 6. Иллюстративный пример численного решения задачи линейного программирования

Как уже говорилось, решение любой задачи линейного программирования, возникающей при моделировании реальных ситуаций, под силу лишь ЭВМ. Во всех крупных вычислительных центрах страны имеются стандартные программы симплекс-метода, позволяющие с успехом решать задачи довольно большой размерности.

Изложение симплекс-метода в этой главе не служит целям научить составлять программы, его реализующие, а лишь описывает его основные идеи с тем, чтобы читатель мог достаточно грамотно пользоваться существующими программами и понимать те трудности, которые могут перед ним возникнуть.

Имеется множество модификаций симплекс-метода, позволяющих, например, учесть специальным образом двусторонние ограничения типа $a \leqslant x_i \leqslant b$ на переменные x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, а не включать их в матрицу ограничений; модификаций, по иному решающих проблему отыскания начального опорного плана и т. д. Знакомство с основной процедурой симплекс-метода позволит быстрее разобраться в многообразии этих приемов и пользоваться ими наиболее эффективно.

Чтобы проиллюстрировать весь материал предшествующих параграфов этой главы, проведем решение одной простейшей задачи линейного программирования.

С этой целью усложним задачу (5.5) — добавим еще одно ограничение, являющееся суммой остальных:

$$\max(x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + x_5)$$

$$\begin{aligned} -x_1 + \ 4x_3 + \ 3x_4 &= 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + \ 5x_4 - x_5 &= 3, \\ x_1 + 3x_2 + \ x_3 + \ 2x_4 + x_5 &= 2, \\ 2x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 10x_4 &= 7, \\ x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5. \end{aligned} \tag{5.39}$$

Решение этой задачи начнем с отыскания начального опорного плана, для чего составим вспомогательную задачу:

$$\max(-v_1 - v_2 - v_3 - v_4)$$

$$\begin{aligned} v_1 - \ x_1 + 4x_3 + \ 3x_4 &= 2, \\ v_2 + 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + \ 5x_4 - x_5 &= 3, \\ v_3 + \ x_1 + 3x_2 + \ x_3 + \ 2x_4 + x_5 &= 2, \\ v_4 + 2x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 10x_4 &= 7, \\ x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5; \quad v_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3, 4. \end{aligned} \tag{5.40}$$

В качестве начального опорного плана этой задачи выберем вектор (2, 3, 2, 7, 0, 0, 0, 0, 0) с базисом v^1, v^2, v^3, v^4. Числа α_{ij}, $1 \leqslant i \leqslant 4$; $1 \leqslant j \leqslant 9$, суть координаты векторов a^j столбцов матрицы A и векторов v^i.

Параметры первого этапа симплекс-метода в применении к задаче (5.40) расположим в табл. 5.1, у которой по столбцам стоят коэффициенты векторов в разложении по базису опорного плана. В столбцах, обозначенных a^j, стоят числа α_{ij}, $1 \leqslant i \leqslant 4$, $1 \leqslant j \leqslant 5$. В столбце b стоят коэффициенты разложения вектора b по базису, т. е. ненулевые координаты опорного плана. В строке Δ стоят числа Δ_j.

ТАБЛИЦА 5.1

	b	v^1	v^2	v^3	v^4	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5
Δ	−14	0	0	0	0	−4	−12	−16	−20	0
v^1	2	1	0	0	0	−1	0	4	3	0
v^2	3	0	1	0	0	2*	3	3	5	−1
v^3	2	0	0	1	0	1	3	1	2	1
v^4	7	0	0	0	1	2	6	8	10	0

Первая итерация. Поскольку $-4<0$, то вектор a^1 можно ввести в базис (правило 1). Из чисел α_{i1}, $1 \leqslant i \leqslant 4$, больше нуля лишь $\alpha_{21}=2$, $\alpha_{31}=1$, $\alpha_{41}=2$. Составляем векторы α_i/α_{i1}:

$$\alpha_2/\alpha_{21} = (3/2,\ 0,\ 1/2,\ 0,\ 0,\ 1,\ 3/2,\ 3/2,\ 5/2,\ -1/2),$$
$$\alpha_3/\alpha_{31} = (2,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 3,\ 1,\ 2,\ 1),$$
$$\alpha_4/\alpha_{41} = (7/2,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1/2,\ 1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 0).$$

Наименьшим в смысле отношения $\succ$ будет вектор α_2/α_{21}, так как его первая координата меньше первых координат

ТАБЛИЦА 5.2

	b	v^1	v^2	v^3	v^4	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5
Δ	-8	0	2	0	0	0	-6	-10	-10	-2
v^1	7/2	1	1/2	0	0	0	3/2	11/2	11/2	$-1/2$
a^1	3/2	0	1/2	0	0	1	3/2	3/2	5/2	$-1/2$
v^3	1/2	0	$-1/2$	1	0	0	3/2*	$-1/2$	$-1/2$	3/2
v^4	4	0	-1	0	1	0	3	5	5	1

остальных векторов. Положим $s=2$ (соответствующий элемент в таблице отмечен звездочкой) и выведем из базиса вектор v^2. При этом $\theta = 3/2$. Произведя вычисления по формулам (5.27)—(5.29), получаем новый опорный план и новый базис.

В табл. 5.2 отражен результат первой итерации симплекс-метода. От допустимого плана (2, 3, 2, 7, 0, 0, 0, 0, 0) задачи (5.40) с базисом v^1, v^2, v^3, v^4 мы перешли к

ТАБЛИЦА 5.3

	b	v^1	v^2	v^3	v^4	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5
Δ	-6	0	0	4	0	0	0	-12	-12	4
v^1	3	1	1	-1	0	0	0	6	6	-2
a^1	1	0	1	-1	0	1	0	2	3	-2
a^2	1/3	0	$-1/3$	2/3	0	0	1	$-1/3$	$-1/3$	1
v^4	3	0	0	-2	1	0	0	6*	6	-2

плану (7/2, 0, 1/2, 4, 3/2, 0, 0, 0, 0) с базисом v^1, a^1, v^3, v^4, причем значение линейной формы увеличилось на 6.

Вторая итерация. Поскольку $-6<0$, то вектор a^2 можно ввести в базис. При этом $\theta = \min\{7/3,\ 1,\ 1/3,\ 4/3\} = 1/3$. Данный минимум достигается при $s=3$, поэтому вектор v^3 выводим из базиса. Результаты второй итерации отражены в табл. 5.3.

Таким образом, мы перешли к первому опорному плану (3, 0, 0, 3, 1, 1/3, 0, 0, 0) с новым базисом v^1, a^1, a^2, v^4. Значение целевой функции увеличилось еще на 2.

Третья итерация. Поскольку $-12<0$, то вектор a^3 вводим в базис; при этом $\theta=\min\{1/2,\ 1/2,\ 1/2\}=1/2$, т. е. минимум достигается сразу на трех индексах 1, 2, 3. Поэтому рассмотрим векторы

$$\alpha_1/\alpha_{13}=(1/2,\ 1/6,\ 1/6,\ -1/6,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ -1/3),$$
$$\alpha_2/\alpha_{23}=(1/2,\ 0,\ 1/2,\ -1/2,\ 0,\ 1/2,\ 0,\ 1,\ 3/2,\ -1),$$
$$\alpha_4/\alpha_{43}=(1/2,\ 0,\ 0,\ -1/3,\ 1/6,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ -1/3).$$

Так как вектор α_4/α_{43} минимален в смысле отношения $\succ$, то вектор v^4 выводим из базиса.

Отметим, что если выбирать любой из индексов, на которых достигается минимум отношения $\succ$ при условии $\alpha_{i3}>0$, то можно случайно выбрать вектор a^2, что не соответствует нашей цели — замещать в базисе векторы v^i. Результаты третьей итерации отражены в табл. 5.4.

Получен новый опорный план (0, 0, 0, 0, 0, 1/2, 1/2, 0, 0) с новым базисом v^1, a^1, a^2, a^3; значение линейной формы увеличилось на 14.

Полученный план оптимален для вспомогательной задачи (5.40), а значит, план $x^0=(0,\ 1/2,\ 1/2,\ 0,\ 0)$ допустим для задачи (5.39).

Вектор v^1 присутствует в базисе плана x^0, и его нельзя заместить ни вектором a^4, ни вектором a^5, поскольку

ТАБЛИЦА 5.4

	b	v^1	v^2	v^3	v^4	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5
Δ	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0
v^1	0	1	1	1	-1	0	0	0	0	0
a^1	0	0	1	$-1/3$	$-1/3$	1	0	0	1*	$-4/3$
a^2	1/2	0	$-1/3$	5/9	1/18	0	1	0	0	8/9
a^3	1/2	0	0	$-1/3$	1/6	0	0	1	1	$-1/3$

в разложении по базису плана x^0 любого вектора a^j коэффициент при v^1 равен 0. Как мы видели в § 4, это означает, что первое уравнение в системе ограничений задачи (5.39) — линнее и его можно отбросить, после этого ранг матрицы ограничений станет равным числу строк.

На табл. 5.4 это отразится следующим образом: надо отбросить строку и столбец, соответствующие вектору v^1.

Переходим к решению задачи (5.39). Для этого следует в табл. 5.4 заменить строку Δ, вычислив значения Δ_j по формулам (5.19) (см. табл. 5.4 *).

Первая итерация. Поскольку $-1<0$, то вектор a^4 вводим в базис. При этом $\theta=\min\{0,\ 1/2\}$, и выводить из

ТАБЛИЦА 5.4*

	b	v^2	v^3	v^4	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5
Δ	5/2	0	2/3	1/6	0	0	0	—1	—1/3
a^1	0	1	—1/3	—1/3	1	0	0	1*	—4/3
a^2	1/2	—1/3	5/9	1/18	0	1	0	0	8/9
a^3	1/2	0	—1/3	1/6	0	0	1	1	—1/3

базиса нужно вектор a^1. Результаты первой итерации решения задачи (5.39) приведены в табл. 5.5.

Получим новый опорный план $x^1=(0,\ 1/2,\ 1/2,\ 0,\ 0)$ (мы не указываем значений вспомогательных переменных) с новым базисом a^4, a^2, a^3.

ТАБЛИЦА 5.5

	b	v^2	v^3	v^4	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5
Δ	5/2	1	1/3	—1/6	1	0	0	0	—5/3
a^4	0	1	—1/3	—1/3	1	0	0	1	—4/3
a^2	1/2	—1/3	5/9	1/18	0	1	0	0	8/9
a^3	1/2	—1	0	1/2	—1	0	1	0	1*

Вторая итерация. Поскольку $-5/3<0$, вводим a^5 в базис; $\theta=\min\{9/16,\ 1/2\}$, следовательно, выводим из базиса вектор a^3 (см. табл. 5.6).

ТАБЛИЦА 5.6

	b	v^2	v^3	v^4	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5
Δ	10/3	—2/3	1/3	2/3	—2/3	0	5/3	0	0
a^4	2/3	—1/3	—1/3	1/3	—1/3	0	4/3	1	0
a^2	1/18	5/9	5/9	—7/18	8*/9	1	—8/9	0	0
a^5	1/2	—1	0	1/2	—1	0	1	0	1

Таким образом, новый опорный план $x^2=(0,\ 1/18,\ 0,\ 2/3,\ 1/2)$, новый базис a^4, a^2, a^5.

Третья итерация. Так как $-2/3<0$, то вектор a^1 нужно снова вводить в базис; при этом $\theta=1/16$. Следовательно, вектор a^2 надо вывести из базиса (см. табл. 5.6).

Полученный план $x^3 = (1/16,\ 0,\ 0,\ 11/16,\ 9/16)$ оптимален, и максимальное значение целевой функции равно 27/8 (см. табл. 5.7).

ТАБЛИЦА 5.7

	b	v^2	v^3	v^4	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5
Δ	27/8	−1/4	3/4	3/8	0	3/4	1	0	0
a^4	11/16	−1/8	−1/8	3/16	0	3/8	1	1	0
a^1	1/16	5/8	5/8	−7/16	1	9/8	−1	0	0
a^5	9/16	−3/8	5/8	1/16	0	9/8	−1	0	1

§ 7. Модифицированный симплекс-метод

Как отмечалось, основное свойство симплекс-метода, обусловливающее его эффективность, состоит в простоте вычислений на каждом этапе итерации. В результате достигается достаточное быстродействие, которое в сочетании с возможностями современных ЭВМ позволяет успешно решать задачи линейного программирования большой размерности. Вместе с тем при решении таких задач существенную роль играет не только быстродействие, но и объем оперативной памяти ЭВМ, используемый в процессе решения.

Оперативная память, в отличие от долговременной, содержит те параметры задачи, с которыми в данный момент производятся вычисления. Основным узким местом в современных ЭВМ является именно объем оперативной памяти.

При реализации симплекс-метода на каждой q-й итерации необходимо хранить в оперативной памяти симплекс-таблицу $\mathfrak{A}^{(q)}$. Эта таблица содержит $(m+1)(n+2)$ чисел. Обсудим, действительно ли следует хранить в оперативной памяти всю симплекс-таблицу.

Основным содержанием итерации симплекс-метода является построение нового базиса. Для этого необходимо иметь в распоряжении следующие параметры: индекс k, для которого $\Delta_k < 0$, позволяющий определить, какой вектор a^k нужно вводить в базис; векторы α^k и α^0, с помощью которых находится индекс s, указывающий, какой столбец a^s следует выводить из базиса.

Формулы (5.27) и (5.28) для вычисления вектора $\overline{\alpha}^k$ и $\overline{\alpha}^0$, соответствующих новому базису, также содержат лишь компоненты векторов α^k и α^0:

$$\overline{\alpha}_{kj} = \frac{1}{\alpha_{sk}}\alpha_{sj}, \ \overline{\alpha}_{ij} = \alpha_{ij} - \frac{\alpha_{ik}}{\alpha_{sk}}\alpha_{sj}, \ i \neq k,$$

при $j = 0$, $j = k$.

При определении же вектора $\overline{\Delta}$ по формуле (5.29) требуется знать s-ю строку матрицы $\mathfrak{A}$. Поскольку номер s заранее неизвестен, то отсюда как будто вытекает, что нужно иметь в своем распоряжении всю матрицу $\mathfrak{A}$.

Обратимся, однако, к представлению векторов Δ и $\overline{\Delta}$ через векторы p^0 и p^1:

$$p^0 = \left(A_0^{-1}\right)' c^0, \tag{5.41}$$

$$\Delta_j = \langle a^j, p^0\rangle - c_j, \ j = 1, 2, \ldots, n, \tag{5.42}$$

$$p^1 = \left(A_1^{-1}\right)' c^1,$$

$$\overline{\Delta}_j = \langle a^j, p^1\rangle - c_j, \ j = 1, 2, \ldots, n.$$

Представим себе, что матрица A хранится в долговременной памяти, и организуем следующий процесс вычислений.

Имеем начальный опорный план x^0, его базис a^{i_1}, $a^{i_2}, \ldots, a^{i_m}$ и матрицу A_0^{-1}.

Этап 1. По формулам (5.41) вычисляем вектор p^0.

Этап 2. Из долговременной памяти вызывается вектор a^j, $j \notin \sigma$ ($\sigma = \{i_1, i_2, \ldots, i_m\}$) и по формуле (5.42) вычисляется число Δ_j. Если $\Delta_j < 0$, то принимается $j = k$ и переходим к следующему этапу. Если $\Delta_j \geqslant 0$, то выбирается следующий вектор a^j, $j \notin \sigma$. На этом пути либо найдется такой k, $k \notin \sigma$, что $\Delta_k < 0$, либо окажется, что все $\Delta_j \geqslant 0$. Последнее означает, что план x^0 оптимален и вычисления следует прекратить.

Этап 3. Вычисляется вектор $\alpha^k = A_0^{-1}a^k$, и с использованием вектора α^0 по правилу 2 находится индекс s.

Этап 4. Матрица A_0^{-1} и вектор α^0 преобразуются по формулам

$$A_1^{-1} = Q^{-1}A_0^{-1}, \quad \overline{\alpha}^0 = Q^{-1}\alpha^0,$$

т. е. по формуле (5.28), где вычисляются не все координаты $(\bar{\alpha}_{i0}, \bar{\alpha}_{i1}, \ldots, \bar{\alpha}_{in})$ строки $\bar{\alpha}_i$, а лишь $\bar{\alpha}_{ij}$, $j \in \sigma^1$.

Возвращение к этапу 1.

Описанная процедура называется модифицированным симплекс-методом. Ее отличие состоит в следующем: в оперативной памяти хранится $(m+1)m$ чисел — элементы A_0^{-1} и вектор α^0; вычисляются, вообще говоря, не все числа Δ_j.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть $X = \{x \mid Ax = b\}$, Q — невырожденная квадратная матрица, число столбцов которой совпадает с числом строк матрицы A, $\widetilde{X} = \{x \mid QAx = Qb\}$. Доказать, что $X = \widetilde{X}$.

2. Рассмотрим две приведенные системы уравнений от n переменных:

а) $x_i + \sum\limits_{j \in \omega} \alpha_{ij} x_j = \alpha_{i0}$, $i \in \sigma$,

б) $x_i + \sum\limits_{j \in \omega} \beta_{ij} x_j = \beta_{i0}$, $i \in \sigma$.

Пусть эти системы уравнений эквивалентны, т. е. множества их решений совпадают. Доказать, что $\alpha_{ij} = \beta_{ij}$, $j \in \omega$, $i \in \sigma$.

3. Пусть X — множество допустимых векторов задачи линейного программирования, $\langle c, x \rangle$ — целевая функция. Если $\langle c, x^1 \rangle > \langle c, x^2 \rangle$, то в любой сколь угодно малой окрестности точки x^2 найдется такая точка $x \in X$, что $\langle c, x \rangle > \langle c, x^2 \rangle$. Доказать. Указание. Рассмотреть точку x вида $x = \alpha x^1 + (1-\alpha) x^2$, где $0 < \alpha < 1$.

4. Показать, что локальный экстремум в задаче линейного программирования является и глобальным. Указание. Воспользоваться упражнением 3.

5. Доказать, что два линейных многообразия $P_1 = x^1 + L_1$ и $P_2 = x^2 + L_2$ совпадают тогда и только тогда, когда $L_1 = L_2$ и $x^1 - x^2 \in L_1$.

6. Доказать, что если задача

$$\max \langle c, x \rangle$$
$$Ax = 0, \quad x \geqslant 0$$

имеет решение, то $x = 0$ является решением.

7. Показать, что условие теоремы 5.4 не является необходимым для оптимальности опорного плана в случае вырожденной задачи. Для этого рассмотреть следующую задачу линейного программирования:

$$\max x_1$$
$$x_1 + x_2 = 1, \quad x_2 + x_3 = 0, \quad x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_3 \geqslant 0.$$

8. Пусть X — допустимое множество задачи (5.2), $x^0 \in X$. Направление $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ назовем допустимым в точке x^0,

если $x^0 + \lambda s \in X$ при достаточно малых $\lambda > 0$. Показать, что направление s допустимо в точке x^0 тогда и только тогда, когда $As = 0$, $s_j \geqslant 0$, если $x_j^0 = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

9. Доказать, что $x^0 \in X$ — оптимальный план задачи (5.2) в том и только том случае, когда $\langle c, s\rangle \leqslant 0$ для любого направления, допустимого в точке x^0.

10. Доказать, что $x^0 \in X$ — оптимальный план задачи (5.2) тогда и только тогда, когда найдутся такие векторы $p^0 \in \mathrm{R}^m$ и $w \in \mathrm{R}^n$, что $c = A'p^0 - w$, $w \geqslant 0$, $\langle x^0, w\rangle = 0$. Указание. Воспользоваться импликацией $As = 0$, $\langle s, e^j\rangle \geqslant 0$, для всех j, для которых $x_j^0 = 0 \Rightarrow \langle c, s\rangle \leqslant 0$, и теоремой 2.27.

11. Доказать теорему: если вектор Δ неотрицателен, то x^0 — решение задачи (5.2). Указание. Использовать упражнения 8—10.

ГЛАВА VI. ДВОЙСТВЕННЫЙ СИМПЛЕКС-МЕТОД

Связи между прямой и двойственной задачами линейного программирования, сыгравшие определенную роль при обосновании симплекс-метода, позволяют также предложить и другие вычислительные схемы решения канонической задачи линейного программирования.

В этой главе излагаются двойственный симплекс-метод, который состоит по сути дела в применении симплекс-метода к двойственной задаче, а также так называемый двойственный симплекс-метод в координатной форме. Несмотря на очевидное сходство описываемых вычислительных процедур, каждая из них имеет свою область применения, в которой использование данного метода наиболее целесообразно. Так, двойственный симплекс-метод удобен тем, что его можно применять в том случае, когда решается не одна, но несколько задач линейного программирования с возрастающим количеством дополнительных ограничений. Этой же особенностью обладает и двойственный симплекс-метод в координатной форме, однако последний, кроме того, оказывается несколько удобнее при исследовании целочисленных задач линейного программирования, которые рассматриваются в гл. VII.

§ 1. Псевдопланы и правила двойственного симплекс-метода

1. Напомним, что в ходе последовательных итераций симплекс-метода строится последовательность планов $x^0, x^1, \ldots, x^q, \ldots$ исследуемой канонической задачи линейного программирования. Этой последовательности по формуле $p^q = \left(A'_\sigma\right)^{-1} c_\sigma$ сопоставляется последовательность $p^0, p^1, \ldots, p^q, \ldots$ векторов, каждый из которых «почти» является планом двойственной задачи в том смысле, что для вектора p^q выполнены те из ограничений, которые соответствуют базисным векторам текущего опорного плана x^q прямой задачи.

В двойственном симплекс-методе строится последовательность векторов x^0, x^1, ..., x^q, ..., каждый из которых «почти» является планом задачи (5.2) — вектор x^q может не удовлетворять лишь условию неотрицательности. В соответствующей последовательности p^0, p^1, ..., p^q, ... каждый вектор является планом двойственной задачи. Как только вектор x^q, вычисленный на очередной итерации, оказывается неотрицательным, т. е. планом задачи (5.2), то он автоматически оказывается оптимальным планом.

2. Перейдем к изложению двойственного симплекс-метода решения канонической задачи линейного программирования

$$\max \langle c, x\rangle$$
$$Ax = b, \quad x \geqslant 0. \tag{6.1}$$

Будем считать, что ранг матрицы A равен m — числу строк в этой матрице.

Определение 6.1. Вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющий системе уравнений $Ax = b$, называется *опорным вектором* для задачи (6.1), если система вектор-столбцов матрицы A, соответствующих ненулевым координатам вектора x, линейно независима.

Обратим внимание на то, что опорный вектор задачи не является, вообще говоря, ее планом.

Определение 6.2. *Базисом опорного вектора* x назовем любую линейно независимую систему из m вектор-столбцов матрицы A, включающую в себя все столбцы, соответствующие ненулевым координатам вектора x.

Пусть имеется опорный вектор x^0 задачи (6.1) и его базис имеет вид

$$\{a^{i_1}, a^{i_2}, \ldots, a^{i_m}\}. \tag{6.2}$$

Обозначим, как и ранее,

$$\sigma = \{i_1, i_2, \ldots, i_m\}, \quad c_\sigma = (c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_m}),$$
$$x_\sigma = (x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}), \quad A_\sigma = (a^{i_1}, a^{i_2}, \ldots, a^{i_m}).$$

Сопоставим опорному вектору x^0 m-мерный вектор

$$p^0 = (A'_\sigma)^{-1} c_\sigma. \tag{6.3}$$

Определение 6.3. Опорный вектор x^0 назовем *псевдопланом*, если

$$A'p^0 \geqslant c. \tag{6.4}$$

Базису (6.2) опорного вектора x^0 сопоставим матрицу

$$B_\sigma = \begin{pmatrix} -1 & c_{i_1} & c_{i_2} & \ldots & c_{i_m} \\ 0 & a^{i_1} & a^{i_2} & \ldots & a^{i_m} \end{pmatrix}$$

и симплексную таблицу $\mathfrak{A} = B_\sigma^{-1}\widetilde{A}$, где (напомним)

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & c_1 & c_2 & \ldots & c_n \\ b & a^1 & a^2 & \ldots & a^n \end{pmatrix}.$$

Отличие от симплексной таблицы, сопоставляемой опорному плану в гл. V, состоит лишь в том, что вектор $\alpha^0 = x_\sigma^0$ теперь не обязан быть неотрицательным.

Как было показано в п. 3 § 2 гл. V, $(\alpha_{01}, \alpha_{02}, \ldots, \alpha_{0n}) = A'p^0 - c$. Отсюда следует, что опорный вектор x^0 является псевдопланом тогда и только тогда, когда $\alpha_{0j} \geqslant 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Свойство (5.31), связывающее векторы x^0 и p^0, дает необходимый и достаточный признак оптимальности псевдоплана x^0.

Теорема 6.1. *Для того чтобы опорный вектор x^0 был оптимальным планом задачи* (6.1), *необходимо и достаточно, чтобы x^0 являлся псевдопланом и удовлетворял условию неотрицательности $x^0 \geqslant 0$.*

3. Пусть x^0 — псевдоплан. Если задать список σ^1 номеров базисных переменных, отличающихся от множества σ одним элементом, то по формулам гл. V можно осуществить переход к новому опорному вектору x^1 и получить новую таблицу $\overline{\mathfrak{A}}$.

В симплекс-методе мы следили за тем, чтобы вновь получаемый опорный вектор x^1 был планом задачи (6.1), т. е. чтобы выполнялось неравенство $\overline{\alpha}_{i0} \geqslant 0$, $i \in \sigma^1$; затем в соответствии с этим мы формулировали основные правила выбора индексов k и s. В двойственном симплекс-методе мы будем стремиться к тому, чтобы вектор $p^1 = (A_{\sigma^1}^1)^{-1} c_{\sigma^1}$ был планом двойственной задачи, т. е. чтобы выполнялись условия $\overline{\alpha}_{0j} \geqslant 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, и вектор x^1 был, следовательно, псевдопланом задачи (6.1).

Правило 1*. *Если s-я координата α_{s0} вектора a^s отрицательна* (т. е. $x_s^0 < 0$), *то вектор a^s следует вывести из базиса* (6.2).

С тем чтобы сформулировать правило, указывающее, какой вектор a^k следует ввести в базис, вспомним, что по формуле (5.29)

$$\bar{\alpha}_{0j} = \alpha_{0j} - \frac{\alpha_{0k}}{\alpha_{sk}} \alpha_{sj}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Следовательно, для того чтобы выполнялись неравенства $\bar{\alpha}_{0j} \geqslant 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, необходимо выполнение условия

$$\alpha_{0j} \geqslant \frac{\alpha_{0k}}{\alpha_{sk}} \alpha_{sj}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{6.5}$$

Теперь можно сформулировать

Правило 2*. *Если решено вектор a^s вывести из базиса, то следует рассмотреть вектор α_s — строку симплексной таблицы $\mathfrak{A}$ и найти все те индексы j, $1 \leqslant j \leqslant m$, для которых $\alpha_{sj} < 0$. Пусть $J = \{j \mid \alpha_{sj} < 0\}$ и индекс $k \in J$ таков, что*

$$\frac{\alpha_{0k}}{\alpha_{sk}} = \max_{j \in J} \frac{\alpha_{0j}}{\alpha_{sj}}.$$

Тогда вектор a^k следует ввести в базис.

Отметим, что согласно этому правилу, в базис могут быть введены лишь векторы, в настоящий момент в нем не занятые, так как если $j \in \sigma$, то $\alpha_{sj} = 0$ при $j \neq s$ и $\alpha_{ss} = 1$, т. е. $\alpha_{sj} \geqslant 0$, $j \in \sigma$.

Обратим внимание на отличия правил 1* и 2* от правил 1 и 2 симплекс-метода. Во-первых, меняется очередность определения векторов, которые нужно вводить и выводить из базиса. Во-вторых, в правиле 2* рассматриваются отрицательные элементы s-й строки, в то время как в правиле 2 фигурируют положительные элементы k-го столбца.

Может случиться, что правило 2* применить нельзя — все величины α_{sj}, $j = 1, 2, \ldots, n$, неотрицательны. Оказывается, что в таком случае решение задачи (6.1) следует прекратить, так как имеет место

Теорема 6.2. *Если $\alpha_{s0} < 0$ (т. е. $x_s^0 < 0$) и $\alpha_{sj} \geqslant 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, то задача* (6.1) *недопустима, т. е. множество X ее планов пусто.*

Доказательство. Предположим, что задача (6.1) обладает планом $\bar{x}$, т. е. $A\bar{x}=b$. Согласно формуле (5.11), $A_\sigma\alpha^0=b$, т. е. $A_\sigma^{-1}A\bar{x}=\alpha^0$. Из (5.13) имеем $A_\sigma^{-1}a^j=\alpha^j$, $j=1, 2, \ldots, n$, что означает, что s-я строка $(A_\sigma^{-1}A)_s$ матрицы $A_\sigma^{-1}A$ равна

$$\left(A_\sigma^{-1}A\right)_s=(\alpha_{s1}, \alpha_{s2}, \ldots, \alpha_{sn}).$$

Отсюда $\alpha_{0s}=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{sj}\bar{x}_j$. Получили противоречивое равенство, так как $\alpha_{0s}<0$, $\bar{x}_j\geqslant 0$, $\alpha_{sj}\geqslant 0$, $j=1, 2, \ldots, n$.

Теорема 6.3. *Если задача* (6.1) *допустима, вектор* x^0 *является псевдопланом и индекс* k *выбран согласно правилу* 2*, *то* $\bar{\alpha}_{0j}\geqslant 0$, $j=1, 2, \ldots, n$, *т. е. вектор* x^1, *соответствующий новой симплексной таблице* $\bar{\mathfrak{A}}$, *является псевдопланом.*

Доказательство. Поскольку $\alpha_{0j}\geqslant 0$, $j=1, 2, \ldots$ $\ldots, n$ (так как x^0 — псевдоплан), то неравенство (6.5), очевидно, выполняется при $\alpha_{sj}\geqslant 0$, так как $\alpha_{sk}<0$. Если же $\alpha_{sj}<0$, то (6.5) эквивалентно неравенству $\frac{\alpha_{0j}}{\alpha_{sj}}\leqslant\frac{\alpha_{0k}}{\alpha_{sk}}$, которое справедливо в силу выбора индекса k по правилу 2*.

Сравним значения линейной формы $\langle c, x^1\rangle$ и $\langle c, x^0\rangle$. По определению симплексной таблицы $\bar{\alpha}_{00}=\langle c, x^1\rangle$. Из формулы (5.29) получаем

$$\bar{\alpha}_{00}=\alpha_{00}-\frac{\alpha_{0k}}{\alpha_{sk}}\alpha_{s0}.$$

Поскольку $\alpha_{s0}<0$, $\alpha_{sk}<0$, $\alpha_{0k}\geqslant 0$, то $\bar{\alpha}_{00}\leqslant\alpha_{00}$, т. е. $\langle c, x^1\rangle\leqslant\langle c, x^0\rangle$. Если окажется, что $\alpha_{0k}>0$, то $\langle c, x^1\rangle<$ $<\langle c, x^0\rangle$. В том же случае, когда $\alpha_{0k}=0$, значение линейной формы при переходе к новому базису (новому псевдоплану) не меняется: возникает ситуация, сходная со случаем применения симплекс-метода к вырожденной задаче.

4. Определение 6.4. Псевдоплан x^0 назовем *невырожденным*, если имеют место неравенства $\alpha_{0j}>0$ при $j\notin\sigma$, $1\leqslant j\leqslant n$.

В терминах двойственной задачи определение 6.4 расшифровывается таким образом: для вектора p^0 равенства $(A'p^0)_j=c_j$ при $j\in\sigma$ выполнено по определению (6.3). Псевдоплан x^0 неврожден, если для всех остальных индексов $j \notin \sigma$ имеют место строгие неравенства $(A'p^0)_j > c_j$. Геометрически это означает следующее. Если x^0 — псевдоплан, то p^0 является крайней точкой множества P допустимых векторов двойственной задачи (5.30). Этот факт следует из теоремы 2.18, поскольку матрица A'_σ является подматрицей носителя плана p^0 и, значит, ранг матрицы-носителя плана p^0 равен m. Поэтому, если выполнено равенство $(A'p^0)_k = c_k$ при $k \notin \sigma$, то ограничение $\langle a^k, p\rangle = c_k$ является «лишним» для задания крайней точки p^0. Если же, например, всякая крайняя точка p^0 многогранника P принадлежит ровно m гиперплоскостям $\langle a^j, p^0\rangle = c_j$, то подобная ситуация встретиться не может.

Определение 6.5. Задача (6.1) называется *двойственно невырожденной*, если всякий ее псевдоплан невырожден.

С использованием введенного понятия может быть сформулирована

Теорема 6.4. *Если задача* (6.1) *двойственно невырожденная, то, начиная с псевдоплана* x^0, *применением двойственного симплекс-метода за конечное число итераций будет либо обнаружена недопустимость задачи, либо найден оптимальный план.*

Доказательство этого утверждения непосредственно вытекает из предшествующих утверждений, конечности множества крайних точек множества P планов двойственной задачи, а также из того, что исключена возможность зацикливания — для двойственно невырожденной задачи значение целевой функции $\langle c, x\rangle$ убывает на очередном псевдоплане.

5. По поводу проблем нахождения начального псевдоплана скажем следующее. Мы будем применять теорию двойственного симплекс-метода лишь при описании алгоритма решения целочисленных задач линейного программирования. Основное содержание этого алгоритма состоит в решении последовательности задач линейного программирования, когда каждая следующая задача получается добавлением нового ограничения к предыдущей. В этом случае, как будет показано в следующем параграфе, проблема отыскания опорного псевдоплана решается совсем просто, считая, что решение первой из рассматриваемых задач уже найдено, например, симплекс-методом.

Тем не менее, к вопросу об отыскании начального псевдоплана и о двойственно вырожденных задачах мы еще вернемся в §§ 4 и 5.

§ 2. Применение двойственного симплекс-метода к задаче с дополнительным ограничением

Пусть x^* — оптимальный опорный план задачи (6.1). Предположим, что к ограничениям этой задачи добавлено еще одно ограничение типа неравенства:

$$\max \langle c, x\rangle$$
$$Ax = b, \tag{6.6}$$
$$\langle a_{m+1}, x\rangle \leqslant b_{m+1}, \quad x \geqslant 0, \tag{6.7}$$

где $a_{m+1} = (a_{m+1\,1}, a_{m+1\,2}, \ldots, a_{m+1\,n})$, b_{m+1} — число.

Если x^* удовлетворяет неравенству (6.7), то x^* является оптимальным планом и всей задачи (6.6), (6.7), поскольку добавление нового ограничения может привести лишь к уменьшению величины максимума целевой функции, так как тем самым сужается область планов. Если же $\langle a_{m+1}, x^*\rangle > b_{m+1}$, то x^* вообще не является планом задачи (6.6), (6.7), и поиск ее решения требует дополнительных вычислений. Покажем, что применение двойственного симплекс-метода позволяет сильно сэкономить количество дополнительных расчетов.

Запишем новую задачу в канонической форме, введя дополнительную переменную x_{n+1}:

$$\max \langle c, x\rangle$$
$$Ax = b, \tag{6.8}$$
$$\langle a_{m+1}, x\rangle + x_{n+1} = b_{m+1}, \quad x \geqslant 0, \quad x_{n+1} \geqslant 0. \tag{6.9}$$

Покажем, что всякий оптимальный план $\tilde{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots$ $\ldots, \bar{x}_n, \bar{x}_{n+1})$ задачи (6.8), (6.9) соответствует оптимальному плану $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ задачи (6.6), (6.7). В самом деле, если $\tilde{x}$ — план задачи (6.8), (6.9), то $\bar{x}$ — план задачи (6.6), (6.7). С другой стороны, если $x' = (x_1', x_2', \ldots$ $\ldots, x_n')$ — произвольный допустимый вектор задачи (6.6), (6.7), то $\tilde{x}' = (x_1', \ldots, x_n', b_{m+1} - \langle a_{m+1} x'\rangle)$ — план задачи (6.8), (6.9) и поэтому $\langle c, \bar{x}\rangle \geqslant \langle c, x'\rangle$.

Отметим, что так как x^* — опорный вектор задачи (6.1), то $\tilde{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*, b_{m+1} - \langle a_{m+1}, x^*\rangle)$ — опорный вектор для задачи (6.8), (6.9). В самом деле, для этого вектора выполнены все ограничения типа равенств, а отрицательной является лишь одна координата $\tilde{x}_{n+1}^* =$

$= b_{m+1} - \langle a_{m+1}, x^* \rangle$. При этом, если $\{a^{i_1}, a^{i_2}, \ldots, a^{i_m}\}$ — базис опорного плана x^*, то система $(m+1)$-мерных векторов

$$\left\{ \begin{pmatrix} a^{i_1} \\ a_{m+1\,i_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{i_2} \\ a_{m+1\,i_2} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a^{i_m} \\ a_{m+1\,i_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \tag{6.10}$$

является, очевидно, базисом вектора $\tilde{x}^*$, т. е. этот вектор — опорный.

Для того чтобы построить симплексную таблицу $\tilde{\mathfrak{A}}$, соответствующую данному базису, воспользуемся замечанием в конце п. 1 § 3 гл. V, которое говорит о том, что элементами симплексной таблицы служат коэффициенты приведенной системы уравнений. Отсюда следует, что первые $m+1$ строк симплексной таблицы $\tilde{\mathfrak{A}}$ получаются из соответствующих строк $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ матрицы $\mathfrak{A}$ — симплексной таблицы, соответствующей базису оптимального плана x^*, добавлением одной нулевой координаты, отвечающей новой переменной x_{n+1}. Для нахождения последней строки α_{m+1} таблицы $\tilde{\mathfrak{A}}$ надо лишь выразить базисную переменную x_{n+1} через небазисные. Пусть ω — список небазисных переменных, т. е. $\omega = \{1, 2, \ldots, n\} \backslash \sigma$, где $\sigma = \{i_1, i_2, \ldots, i_m\}$. Тогда

$$x_{n+1} = b_{m+1} - \sum_{j=1}^{n} a_{m+1\,j} x_j. \tag{6.11}$$

Подставляя из (5.1) выражения для базисных переменных, получаем

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= b_{m+1} - \sum_{i \in \sigma} a_{m+1\,i} x_i - \sum_{j \in \omega} a_{m+1\,j} x_j = \\ &= b_{m+1} - \sum_{i \in \sigma} a_{m+1\,i} \Big(\alpha_{i0} - \sum_{j \in \omega} \alpha_{ij} x_j \Big) - \sum_{j \in \omega} a_{m+1\,j} x_j = \\ &= b_{m+1} - \sum_{i \in \sigma} a_{m+1\,i} \alpha_{i0} - \sum_{j \in \omega} \Big(a_{m+1\,j} - \sum_{i \in \sigma} a_{m+1\,i} \alpha_{ij} \Big) x_j. \end{aligned}$$

Следовательно, последнее (получаемое из (6.8)) уравнение приведенной системы для (6.7) имеет вид

$$x_{n+1} + \sum_{j \in \omega} \Big(a_{m+1\,j} - \sum_{i \in \sigma} a_{m+1\,i} \alpha_{ij} \Big) x_j = b_{m+1} - \sum_{i \in \sigma} a_{m+1\,i} \alpha_{i0}.$$

Отсюда

$$\alpha_{m+1\,0} = b_{m+1} - \sum_{i\in\sigma} a_{m+1\,i}\alpha_{i0}, \tag{6.12}$$

$$\alpha_{m+1\,j} = \begin{cases} 0, \text{ если } j \in \sigma, \\ 1, \text{ если } j = n+1, \\ a_{m+1\,j} - \sum\limits_{i\in\sigma} a_{m+1\,i}\alpha_{ij}, \text{ если } j \in \omega. \end{cases} \tag{6.13}$$

Поскольку вектор x^* оптимален для задачи (6.1), то $\alpha_{0j} \geqslant 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Так как эти же элементы образуют (вместе с α_{00}) первую строку матрицы $\widetilde{\mathfrak{A}}$, то отсюда следует, что $\tilde{x}^*$ — псевдоплан для задачи (6.6), (6.7).

Таким образом, в том случае, когда уже найден опорный оптимальный план задачи (6.1), имеется результирующая симплексная таблица $\mathfrak{A}$ и требуется решить задачу (6.6), (6.7), то это сделать несложно. Согласно вышесказанному, с учетом формул (6.12), (6.13) непосредственно составляется симплексная таблица $\widetilde{\mathfrak{A}}$, отвечающая псевдоплану $\tilde{x}^*$, и задача (6.6) решается двойственным симплекс-методом. Как правило, при этих условиях для получения решения задачи (6.6) требуется небольшое количество вычислений.

§ 3. Симплексная таблица в координатной форме

При решении задач линейного программирования по симплекс-методу, как он был описан в гл. V, основным объектом вычислений является симплексная таблица, элементы которой совпадают с коэффициентами приведенной по методу Жордана — Гаусса системы, соответствующей выбранному опорному вектору. Так, если сопоставить задаче (6.1) систему уравнений

$$\begin{gathered} x_0 - \langle c, x\rangle = 0, \\ Ax = b, \end{gathered} \tag{6.14}$$

то приведенная система имеет вид

$$x_0 + \sum_{j\in\omega} \alpha_{0j}x_j = \langle c, x^0\rangle, \tag{6.15}$$

$$x_i + \sum_{j\in\omega} \alpha_{ij}x_j = \alpha_{i0}, \qquad i \in \sigma, \tag{6.16}$$

где $\sigma = \{i_1, i_2, \ldots, i_m\}$ — список номеров базисных переменных, $\omega = \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \sigma$ — множество номеров небазисных переменных (см. § 1 гл. V). Матрица $\mathfrak{A}$, составленная из коэффициентов системы (6.15), (6.16), и называется *симплексной таблицей* (см. гл. V).

Возможен, однако, и другой способ организации необходимой информации, основанный на следующих соображениях. Введем в рассмотрение векторы $c(x) = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_0 = \langle c, x \rangle$. $(n+1)$-мерный вектор $c(x)$ является решением системы (6.14) (а значит, и эквивалентной ей системы (6.15), (6.16)) тогда и только тогда, когда $Ax = b$.

Как известно из курса алгебры (см. [1]), общее решение системы уравнений (6.15), (6.16) представляется в виде $c(x^0) + L$, где $c(x^0)$ — частное решение данной системы, а L — пространство всех решений однородной системы уравнений

$$x_0 + \sum_{j \in \omega} \alpha_{0j} x_j = 0, \tag{6.17}$$

$$x_i + \sum_{j \in \omega} \alpha_{ij} x_j = 0, \qquad i \in \sigma. \tag{6.18}$$

Частное решение системы (6.15), (6.16) находится без труда — это вектор $c(x^0)$, где $x^0 = \left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$, причем

$$x_i^0 = \begin{cases} \alpha_{i0}, & \text{если } i \in \sigma, \\ 0, & \text{если } i \in \omega. \end{cases}$$

Множество L конструктивно можно задать фундаментальной системой решений. Обозначим $x_\omega = \left(x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots \right.$ $\left. \ldots, x_{j_{n-m}}\right)$, где $\omega = (j_1, j_2, \ldots, j_{n-m})$. Фундаментальную систему решений для (6.17), (6.18) можно получить, полагая вектор x_ω поочередно равным векторам ортонормального базиса пространства $\mathbf{R}^{n-m}$.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} v^1 &= (1, 0, 0, \ldots, 0) \in \mathbf{R}^{n-m}, \\ v^2 &= (0, 1, 0, \ldots, 0), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v^{n-m} &= (0, 0, 0, \ldots, 1). \end{aligned}$$

Положим $x_\omega = -v^1$ и вычислим значения базисных переменных из формул

$$x_0 = -\sum_{j\in\omega} \alpha_{0j} x_j, \tag{6.19}$$

$$x_i = -\sum_{j\in\omega} \alpha_{ij} x_j, \qquad i \in \sigma. \tag{6.20}$$

Получившийся $(n+1)$-мерный вектор обозначим через β^{j_1}. Таким же образом получим векторы $\beta^{j_2}, \beta^{j_3}, \ldots, \beta^{j_{n-m}}$. Здесь $\beta^j = (\beta_{0j}, \beta_{1j}, \ldots, \beta_{nj})$, $j \in \omega$, где

$$\beta_{ij} = \begin{cases} \alpha_{ij}, & \text{если } i = 0 \text{ или } i \in \sigma, \\ 0, & \text{если } i \in \omega,\ i \neq j, \\ -1, & \text{если } i \in \omega,\ i = j. \end{cases}$$

Введем обозначение: $D = \left(\beta^{j_1}, \beta^{j_2}, \ldots, \beta^{j_{n-m}}\right)$. Тогда D — матрица размеров $(n+1) \times (n-m)$. Отметим некоторые свойства матрицы D. Пусть $z = (z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n)$ — произвольный вектор, удовлетворяющий однородной системе уравнений (6.15), т. е. $z \in L$. Тогда z может быть разложен по векторам $\beta^{j_1}, \beta^{j_2}, \ldots, \beta^{j_{n-m}}$, составляющим базис пространства L:

$$z = \gamma_1 \beta^{j_1} + \gamma_2 \beta^{j_2} + \ldots + \gamma_{n-m} \beta^{j_{n-m}}.$$

Используя специальную структуру векторов β^{j_q}, нетрудно определить коэффициенты γ_q: для координаты z_{j_q} вектора z получаем $z_{j_q} = -\gamma_q$, $q = 1, 2, \ldots, n-m$, т. е.

$$z = -\left(z_{j_1} \beta^{j_1} + z_{j_2} \beta^{j_2} + \ldots + z_{j_{n-m}} \beta^{j_{n-m}}\right),$$

или

$$z = -D z_\omega, \tag{6.21}$$

где (напомним) $z_\omega = \left(z_{j_1}, z_{j_2}, \ldots, z_{j_{n-m}}\right)$.

В частности,

$$\beta^j = -D \beta^j_\omega = D v^q, \qquad j \in \omega, \quad j = j_q, \tag{6.22}$$

так как

$$\beta^{j_q}_\omega = -v^q. \tag{6.23}$$

Проследим за изменением матрицы D при переходе к новому базису (новому опорному вектору).

Пусть x^1 — опорный вектор задачи (6.1) и

$$\left\{a^{i_1}, a^{i_2}, \ldots, a^{i_{t-1}}, a^k, a^{i_{t+1}}, \ldots, a^{i_m}\right\} \tag{6.24}$$

— его базис, где $k \in \omega$, и пусть $\overline{D}$ — матрица, соответствующая базису (6.24) согласно описанной процедуре.

Если обозначить

$$\omega^1 = \{i_1, i_2, \ldots, i_{t-1}, k, i_{t+1}, \ldots, i_{n-m}\},$$

то для матрицы $\overline{D}$ получим

$$z = -\overline{D}z_{\omega^1} \quad \forall z \in L, \tag{6.25}$$

$$\overline{\beta}^s = \overline{D}v^r, \quad \overline{\beta}^{j_q} = \overline{D}v^q, \quad q = 1, 2, \ldots, n-m, \quad q \neq r. \tag{6.26}$$

Из (6.21) и (6.25) получаем $Dz_\omega = \overline{D}z_{\omega^1}$ $\forall z \in L$. Между проекциями z_ω и z_{ω^1} вектора z существует простая связь: $z_{\omega^1} = z_\omega - (z_k - z_s)\,v^r$, $k = j_r$, $s = i_t$, так как $v_q^r = 0$ при $r \neq q$, $v_r^r = 1$. Тогда

$$Dz_\omega = \overline{D}z_\omega - (z_k - z_s)\,\overline{D}v^r. \tag{6.27}$$

Возьмем в качестве z вектор β^k — j_r-й столбец матрицы D:

$$D\beta^k_\omega = \overline{D}\beta^k_\omega - (1 - \beta_{sk})\,\overline{D}v^r.$$

С учетом (6.22), (6.23) имеем

$$Dv^r - \overline{D}v^r + (1 + \beta_{sk})\,\overline{D}v^r,$$

или, привлекая еще раз (6.22) и (6.26), $\beta^k = -\beta_{sk}\overline{\beta}^s$, т. е.

$$\overline{\beta}^s = -\frac{1}{\beta_{sk}}\beta^k. \tag{6.28}$$

Тем самым получена формула преобразования k-го столбца матрицы D. Чтобы вывести формулу для остальных столбцов, положим в (6.27) $z = \beta^j$, $j \neq k$, $j = j_q$:

$$D\beta^j_\omega = \overline{D}\beta^j_\omega - (0 - \beta_{sq})\,\overline{D}v^r.$$

Вновь с учетом (6.22), (6.23) и (6.26) получаем $\beta^j = \overline{\beta}^j - \beta_{sq}\overline{\beta}^s$. Подставляя выражение (6.28) для $\overline{\beta}^s$, приходим к соотношениям

$$\overline{\beta}^j = \beta^j - \frac{\beta_{sj}}{\beta_{sk}}\beta^k, \qquad j \in \omega, \ j \neq k. \tag{6.29}$$

Формулы (6.28) и (6.29) полностью описывают преобразование матрицы D к матрице $\overline{D}$ при переходе от базиса (6.16) к базису (6.24).

Выведем формулу, связывающую векторы $c(x^0) = \left(x_0^0, x_1^0, \ldots, x_n^0\right)$ и $c(x^1) = \left(x_0^1, x_1^1, \ldots, x_n^1\right)$. Положим $z = c(x^1) - c(x^0) \in L$. Поскольку $c(x^1)_{\omega 1} = 0$, $c(x^0)_{\omega_1} = -x_s^0 v^r$, то $z_{\omega 1} = x_s^0 v^r$. Тогда из (6.27) имеем $c(x^1) - c(x^0) = -x_s^0 \overline{D} v^r = x_s^0 \overline{\beta}^k$. Используя (6.28), получаем

$$c(x^1) = c(x^0) - \frac{x_s^0}{\beta_{sk}} \beta^k. \tag{6.30}$$

Отсюда видно, что формула (6.30) идентична (6.29), т. е. вектор $c(x^0)$ преобразуется так же, как и столбцы β^j, $j \neq k$, матрицы D. Введем обозначение $c(x^0) = \beta^0$, т. е. $x_i^0 = \beta_{i0}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Тогда в формуле (6.29) следует считать $j = 0$, или $j \in \omega$, $j \neq k$.

Матрицу

$$\mathfrak{B} = \left(\beta^0, \beta^{j_1}, \beta^{j_2}, \ldots, \beta^{j_{n-m}}\right)$$

назовем симплексной таблицей в координатной форме, соответствующей базису $\left\{a^{i_1}, a^{i_2}, \ldots, a^{i_m}\right\}$ *опорного вектора* x^0.

§ 4. Двойственный симплекс-метод в координатной форме

По построению симплексная таблица в координатной форме $\mathfrak{B}$ такова, что ее столбец β^0 совпадает с вектором $c(x^0) = \left(\langle c, x^0\rangle, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$, а ее строка β_0 имеет вид $\beta_0 = \left(\langle c, x^0\rangle, \Delta_{j_1}, \Delta_{j_2}, \ldots, \Delta_{j_{n-m}}\right)$. Таким образом, $\mathfrak{B}$ содержит всю необходимую информацию для применения как симплекс-метода, так и его двойственного варианта.

Опишем использование таблицы $\mathfrak{B}$ в двойственном симплекс-методе, считая, что задача (6.1) может быть и вырожденной.

С этой целью уточним правило 2*.

П р а в и л о 2*$^{\prime}$. *Если решено вектор a^s вывести из базиса, то следует рассмотреть вектор β_s — строку с номером s таблицы $\mathfrak{B}$ и найти все те индексы j, $j \in \omega$, для которых $\beta_{sj} < 0$. Затем нужно рассмотреть векторы* $\frac{1}{\beta_{sj}}\beta^j$

для этих индексов j и выбрать k таким образом, чтобы $\beta_{sk} < 0$ и $\frac{1}{\beta_{sk}}\beta^k \succ \frac{1}{\beta_{sj}}\beta^j$ для всех таких $j \in \omega$, что $\beta_{sj} < 0$.

Согласно этому правилу индекс k определяется однозначно. Действительно, если найдется еще один индекс j, для которого вектор $\frac{1}{\beta_{sj}}\beta^j$ лексикографически максимален, то

$$\frac{1}{\beta_{sj}}\beta^j = \frac{1}{\beta_{sk}}\beta^k,$$

что противоречит линейной независимости вектора β^j, $j \in \omega$.

Определение 6.6. Назовем псевдоплан x^0 *строго допустимым, если* $\beta^j \succ 0$, $j \in \omega$.

Заметим, что невырожденный псевдоплан строго допустим, поскольку $\Delta_j = \beta_{0j} > 0$, $j \in \omega$.

Теорема 6.5. *Если x^0 — строго допустимый псевдоплан, индекс k выбирается согласно правилу $2^{*\prime}$, то x^1 — строго допустимый псевдоплан.*

Доказательство. Поскольку правило $2^{*\prime}$ является усилением правила 2^*, то согласно теореме 6.3 x^1 — псевдоплан. Следовательно, остается лишь доказать, что $\overline{\beta}^j \succ 0$, $j \in \omega^1$. По формуле (6.29) сразу получаем, что $\overline{\beta}^k \succ 0$ (так как $\beta_{sk} < 0$). Из (6.30) для тех j, при которых $\beta_{sj} \geqslant 0$, имеем $\overline{\beta}^j \succ 0$, так как $-\frac{\beta_{sj}}{\beta_{sk}} \geqslant 0$. Если же $\beta_{sj} < 0$, то неравенство

$$\beta^j \succ \frac{\beta_{sj}}{\beta_{sk}}\beta^k$$

эквивалентно неравенству

$$\frac{1}{\beta_{sj}}\beta^j \prec \frac{1}{\beta_{sk}}\beta^k,$$

которое выполнено вследствие выбора k.

Теорема 6.6. *Если x^0 — строго допустимый псевдоплан и выбор индекса k осуществляется в соответствии с правилом $2^{*\prime}$, то*

$$c(x^1) \prec c(x^0).$$

Доказательство. Поскольку согласно правилу 1^* выбора индекса s $x_s^0 < 0$ и $\beta_{sk} < 0$, то $x_s^0/\beta_{sk} > 0$. Тогда из (6.30) с учетом неравенства $\beta^k \succ 0$ получаем $c(x^1) \prec \prec c(x^0)$.

Из доказанных теорем вытекает, что если применять двойственный симплекс-метод с использованием симплексной таблицы в координатной форме и руководствоваться правилами 1* и 2*^{l}, причем в качестве начального взять строго допустимый псевдоплан x^0, то возможность зацикливания исключена.

О способах отыскания начального строго допустимого псевдоплана будет сказано в § 5.

§ 5. Нахождение начального псевдоплана

Проблема нахождения начального псевдоплана в общем случае сложнее, чем задача отыскания опорного плана. Это видно хотя бы из тех требований, которым должен удовлетворять псевдоплан x^0: $Ax^0 = b$, $A'p^0 \geqslant c$, где $p^0 = (A_\sigma')^{-1} c_\sigma$ (напомним, что A_σ — матрица, столбцами которой служат векторы базиса псевдоплана x^0, $c_\sigma = (c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_m})$). Поэтому часто оказывается уместным заменить задачу (6.1) другой, для которой псевдоплан указывается непосредственно. Прежде чем описать соответствующую процедуру, сделаем дополнительное предположение о свойствах задачи (6.1). Именно, будем считать, что множество X^0 решений этой задачи ограничено (данное предположение несколько облегчит нижеследующие рассуждения, в то же время основное интересующее нас применение результатов этой главы состоит в изучении целочисленных задач линейного программирования, где подобное предположение все равно необходимо).

Применив метод исключения Жордана — Гаусса, построим для задачи (6.1) симплексную таблицу $\mathfrak{B}$ в координатной форме, получив тем самым и некоторый опорный вектор x^0.

Пусть $\sigma = \{i_1, i_2, \ldots, i_m\}$, $\omega = \{j_1, j_2, \ldots, j_{n-m}\}$ — множества номеров соответственно базисных и небазисных переменных в таблице $\mathfrak{B}$.

Если вектор x^0 — строго допустимый псевдоплан, то больше ничего делать не надо. В противном случае в таблице $\mathfrak{B}$ имеется хотя бы один вектор β^j, $j \in \omega$, для которого выполняется условие $\beta^j \prec 0$.

Сопоставим задаче (6.1) новую задачу линейного программирования, введя дополнительную переменную x_{n+1}

и новое ограничение:

$$\max \langle c, x \rangle$$
$$Ax = b, \ \sum_{j \in \omega} x_j + x_{n+1} = M, \tag{6.31}$$
$$x \geqslant 0, \ x_{n+1} \geqslant 0.$$

Здесь M — такое достаточно большое число, что для любого решения $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) \in X^0$ задачи (6.1) выполняется неравенство

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^* \leqslant M. \tag{6.32}$$

Несколько ниже будут высказаны определенные соображения о способах выбора числа M.

Нетрудно видеть, что при выполнении условия (6.32) множества решений задач (6.31) и (6.1) тесно связаны. Действительно, если $x^* \in X^0$, то положив $x_{n+1}^* = M - \sum_{j \in \omega} x_j^* \geqslant 0$, очевидно, получим решение (x^*, x_{n+1}^*) задачи (6.31). Наоборот, всякому решению $(x_1^*, x_2^*, \ldots \ldots, x_n^*, x_{n+1}^*)$ задачи (6.31) соответствует решение $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ для (6.1).

Симплексная таблица $\mathfrak{B}$ в координатной форме для задачи (6.1) отвечает некоторой приведенной системе уравнений вида

$$x_0 = \alpha_{00} - \sum_{j \in \omega} \alpha_{0j} x_j,$$
$$x_i = \alpha_{i0} - \sum_{j \in \omega} \alpha_{ij} x_j, \qquad i \in \sigma,$$

где $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$,

$$x_i^0 = \begin{cases} \alpha_{i0}, & i \in \sigma, \\ 0, & i \notin \sigma, \end{cases}$$

является опорным вектором системы уравнений $Ax = b$ с базисом $\{a^i, i \in \sigma\}$. Ясно, что вектор (x^0, x_{n+1}^0), где $x_{n+1}^0 = M - \sum_{j \in \omega} x_j^0$, в этом случае является опорным для задачи (6.31).

Если обозначить вектор-столбцы симплексной таблицы $\mathfrak{B}$, соответствующей списку номеров σ базисных переменных задачи (6.1), через β^j, $j \in \omega$, $j = 0$, то столбцами симплексной таблицы $\mathfrak{B}_M$, соответствующей списку номеров $\{\sigma, n+1\}$ базисных переменных задачи (6.31), служат векторы

$$\left\{\begin{pmatrix} \beta^j \\ 1 \end{pmatrix}, \ j \in \omega, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, \tag{6.33}$$

где 0 обозначает нулевой вектор в $\mathbf{R}^{n+1}$.

Для построения нового опорного вектора задачи (6.31) поступим следующим образом: объявим переменную x_{n+1} небазисной. В таком случае, конечно, нужно какую-нибудь переменную x_k из числа x_j, $j \in \omega$, объявить базисной.

Выберем индекс $k \in \omega$ таким образом, чтобы для всех $j \in \omega$ выполнялись неравенства

$$\begin{pmatrix} \beta^k \\ 1 \end{pmatrix} \prec \begin{pmatrix} \beta^j \\ 1 \end{pmatrix},$$

т. е. чтобы вектор $\begin{pmatrix} \beta^k \\ 1 \end{pmatrix}$ был лексикографически минимальным среди всех вектор-столбцов таблицы $\mathfrak{B}_M$. Так как опорный вектор x^0 не был строго допустим, то

$$\beta^k \prec 0 \text{ и } \begin{pmatrix} \beta^k \\ 1 \end{pmatrix} \prec \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Преобразовав таблицу $\mathfrak{B}_M$ по формулам (6.28) и (6.29) (при $j \in \omega$, $j = 0$), получим симплексную таблицу $\overline{\mathfrak{B}}_M$ в координатной форме, соответствующую некоторому опорному вектору $x^1 = \left(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_{n+1}^1\right)$ задачи (6.31), в котором $x_j^1 = 0$ для всех $j \in \omega$, $j \neq k$, $x_{n+1}^1 = 0$.

Поскольку $\beta_{n+1\,j} = 1$ для всех $j \in \omega$, то согласно формулам (6.28) и (6.29) для столбцов $\overline{\beta}^j$, $j \in \omega$, $j \neq k$, $j = n+1$, симплексной таблицы $\overline{\mathfrak{B}}_M$ будут выполнены условия

$$\overline{\beta}^s \succ 0, \quad \overline{\beta}^j \succ 0, \quad j \in \omega, \quad j \neq k.$$

Отсюда следует, что вектор $(x^1, 0)$ является строго допустимым псевдопланом для задачи (6.31).

Применяя теперь двойственный симплекс-метод в координатной форме, можно найти решение $\left(x^*, x_{n+1}^*\right)$ для (6.31); при этом, как отмечалось, вектор x^* служит решением задачи (6.1).

Обсудим вопрос о способах выбора числа M в (6.31). Во многих задачах число M можно указать без труда. Так, допустим, что среди строк матрицы A имеется строка a_i, все элементы которой положительны, $a_{ij} > 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Это означает, что множество X планов задачи (6.1) ограничено, и в качестве числа M можно взять число $b_i / \min\limits_j a_{ij}$.

Аналогично, пусть вектор $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$, определяющий целевую функцию задачи (6.1), положителен, $c_i > 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Предположим, что найдено ограничение $\tilde{d}$ сверху для значения d этой задачи (например, найден план p двойственной задачи и $\tilde{d} = \langle p, b \rangle$). Тогда для любого решения x^* задачи (6.1) выполнено условие $\sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j^* \leqslant \tilde{d}$. Следовательно, в качестве числа M можно взять $M = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \dfrac{\tilde{d}}{c_j}$.

Наконец, если число M непосредственно указать не удается, однако необходимо найти строго допустимый псевдоплан задачи вида (6.31) (например, для решения лексикографической задачи, см. следующий параграф), то можно рассмотреть задачу

$$\max \sum_{j=1}^{n} x_j$$

$$Ax = b, \quad x \geqslant 0$$

и решить ее симплекс-методом. Значение этой задачи можно принять за M.

§ 6. Лексикографическая задача линейного программирования

В данном параграфе будем использовать обозначение $c(x) = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_0 = \langle c, x \rangle$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$.

Пусть X — множество планов задачи (6.1), т. е.

$$X = \{x \mid x \in \mathbf{R}^n, \quad Ax = b, \quad x \geqslant 0\}.$$

Сформулируем задачу следующим образом: найти такой вектор $x^* \in X$, что

$$c(x^*) \succ c(x) \tag{6.34}$$

для всех $x \in X$, $x \neq x^*$.

Задача (6.34) называется *лексикографической.*

Ясно, что если x^* — решение задачи (6.34), то этот вектор является и решением задачи (6.1), поскольку отношение $c(x^*) > c(x)$ означает, в частности, что $\langle c, x^* \rangle \geqslant \geqslant \langle c, x \rangle$.

Следовательно, задачу (6.34) можно сформулировать и так: среди всех решений задачи (6.1) найти лексикографически максимальное.

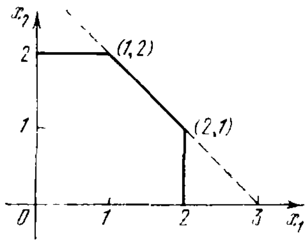

Рис. 6.1.

Приведем простой пример, показывающий, какое именно решение задачи типа (6.1) выбирается в качестве решения задачи (6.34). А именно, рассмотрим задачу

$$\max(x_1 + x_2)$$

$$x_1 + x_3 = 2, \quad x_2 + x_4 = 2, \quad x_1 + x_2 + x_5 = 3,$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = \overline{1, 5}.$$

Эта каноническая задача сводится к стандартной:

$$\max(x_1 + x_2)$$

$$x_1 \leqslant 2, \quad x_2 \leqslant 2, \quad x_1 + x_2 \leqslant 3,$$

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0,$$

допустимое множество которой изображено на рис. 6.1.

Множеством X^0 решений рассматриваемой задачи является отрезок с концами в точках (1, 2), (2, 1), т. е. решение этой задачи — произвольная точка вида $(\alpha + 1, 2 - \alpha)$, где $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

Тогда множество решений исходной канонической задачи состоит из векторов $(\alpha + 1, 2 - \alpha, 1 - \alpha, \alpha, 0)$. Среди них лексикографически максимальным является вектор при $\alpha = 1$, т. е. (2, 1, 0, 1, 0).

Следующий пример показывает, что задача (6.34) не всегда имеет решение даже в тех случаях, когда задача (6.1) разрешима:

$$\max(x_1 - x_2)$$

$$x_1 - x_2 = 0, \quad x_1, \quad x_2 \geqslant 0.$$

Здесь множество решений состоит из всех векторов (x, x), $x \geqslant 0$. В то же время, очевидно, соответствующая лексикографическая задача не имеет решения — в множестве $X^0 = \{(x, x), x \geqslant 0\}$ нет лексикографически максимального вектора.

Отметим некоторые свойства лексикографической задачи линейного программирования.

Теорема 6.7. *Если задача* (6.34) *имеет решение, то оно единственно.*

Доказательство. Допустим, что x^*, $\bar{x}$ — два различных решения. Тогда должны выполняться оба неравенства $x^* \succ \bar{x}$, $\bar{x} \succ x^*$, что невозможно по определению лексикографического порядка.

Теорема 6.8. *Если x^* — решение задачи* (6.34), *то x^* — крайняя точка многогранного множества X.*

Доказательство. Пусть $x^* = \frac{1}{2} x^1 + \frac{1}{2} x^2$, где x^1, $x^2 \in X$, причем $x^1 \neq x^2 \neq x^*$. Предположим, что $c(x^1) \succ c(x^2)$. Тогда $c(x^*) = \frac{1}{2} c(x^1) + \frac{1}{2} c(x^2) \prec \frac{1}{2} c(x^1) + \frac{1}{2} c(x^1) = c(x^1)$, что противоречит определению x^* как решения задачи (6.34).

Теорема 6.9. *Задача* (6.34) *имеет решение тогда и только тогда, когда множество X^0 решений задачи* (6.1) *не пусто и ограничено.*

Доказательство. Пусть X^0 ограничено, тогда X^0 — выпуклый многогранник. Из теорем 2.11 и 2.12 следует, что каждая точка $x \in X^0$ представляется в виде выпуклой линейной комбинации множества $x^1, x^2, \ldots, x^k$ всех крайних в X^0 точек: $x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x^i$, где $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$, $\alpha_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Из конечности числа k крайних точек в X^0 (теорема 2.17) следует, что среди них найдется точка x^*, для которой $c(x^*) \succ c(x^i)$, $x^i \neq x^*$, $1 \leqslant i \leqslant k$. Покажем, что x^* — решение задачи (6.34). В самом деле, пусть $x \in X^0$ — произвольная точка. Тогда

$$c(x) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i c(x^i) \prec \sum_{i=1}^{k} \alpha_i c(x^*) = c(x^*).$$

Докажем утверждение в обратную сторону. Предположим, что задача (6.34) имеет решение x^*, однако множество X^0 неограничено. Тогда

$$X^0 = M^{X^0} \dotplus K^{X^0},$$

где

$$K^{X^0} = \{y \mid y \in \mathbf{R}^n, Ay = b, y \geqslant 0, \langle c, y \rangle = 0\}$$

(см. § 4 гл. III). Из неограниченности X^0 следует, что $K^{X^0} \neq 0$. Пусть $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in K^{X^0}$ — произвольный ненулевой вектор, и j — минимальный номер, для которого $y_j > 0$ (т. е. $y_i = 0$ при $0 \leqslant i \leqslant j-1$). Тогда очевидно, что вектор $\bar{x} = x^* + y$ удовлетворяет условию $\bar{x} \succ x^*$, так как $\bar{x}_i = x_i^*$ при $0 \leqslant i \leqslant j-1$ и $\bar{x}_j > x_j^*$. Ясно также, что $\bar{x} \in X^0$. Получили противоречие с определением вектора x^*.

Следующая теорема указывает способ решения лексикографической задачи линейного программирования.

Теорема 6.10. *План x^* задачи* (6.1) *тогда и только тогда является решением лексикографической задачи* (6.34), *когда x^* — строго допустимый псевдоплан.*

Для доказательства этого важного факта потребуется

Лемма 6.1. *Пусть x — произвольный план задачи* (6.1), *x^0 — ее строго допустимый псевдоплан. Тогда $c(x) \prec c(x^0)$.*

Доказательство. Нетрудно показать, что для произвольного псевдоплана x выполняется неравенство $\langle c, x^0\rangle \geqslant \langle c, x\rangle$. Если $\langle c, x^0\rangle > \langle c, x\rangle$, то согласно определению лексикографического порядка $c(x^0) \succ c(x)$. Пусть $\langle c, x^0\rangle = \langle c, x\rangle$. Тогда вектор $z = c(x^0) - c(x)$ принадлежит подпространству L, определенному системой уравнений (6.17), (6.18) (т. е. $Az = 0$).

Рассмотрим матрицу D — симплексную таблицу в координатной форме (без первого столбца), соответствующую псевдоплану x^0. Согласно формуле (6.21), $z = -Dz_\omega$, или $c(x^0) - c(x) = -D[c(x^0) - c(x)]_\omega$. Заметим, что

$$[c(x^0) - c(x)]_\omega = c(x^0)_\omega - c(x)_\omega = -x_\omega$$

(так как $c(x^0)_\omega = 0$). Таким образом, $c(x^0) - c(x) = Dx_\omega$. Вектор Dx_ω представляет собой неотрицательную (так как $x \geqslant 0$) линейную комбинацию столбцов матрицы D:

$$Dx_\omega = \sum_{j \in \omega} x_j \beta^j.$$

Поскольку псевдоплан x^0 строго допустим, то $\beta^j \succ 0$, $j \in \omega$, откуда следует, что $Dx_\omega \succ 0$ (может случиться, что $Dx_\omega = 0$, если $x_\omega = 0$). Отсюда получаем, что $c(x^0) \succ c(x)$ при $x \neq x^0$.

Доказательство теоремы 6.10. Если x^* — строго допустимый псевдоплан, являющийся также планом задачи (6.1) (т. е. $x^* \geqslant 0$), то, по только что доказанной лемме, x^* — решение лексикографической задачи (6.34).

Наоборот, пусть x^* — решение лексикографической задачи (6.34). В таком случае по теореме 6.9 множество X^0 решений задачи (6.1) ограничено. Сопоставим задаче (6.1) задачу (6.31), считая, что выполнено условие (6.32) для всех $x \in X^0$. Согласно теореме 6.8, x^* — крайняя точка множества X^0, т. е. x^* является опорным вектором. Поскольку x^* является и решением задачи (6.1), то по теореме 6.1 x^* — псевдоплан. Предположим, что псевдоплан x^* не является строго допустимым.

Вектор $\left(x^*, \overset{*}{x}_{n+1}\right)$, где $\overset{*}{x}_{n+1} = M - \sum\limits_{j\in\omega} \overset{*}{x}_j$, обладает следующими свойствами: так как он неотрицателен, то служит планом задачи (6.31); поскольку x^* — псевдоплан для (6.1), то $\left(x^*, \overset{*}{x}_{n+1}\right)$ — псевдоплан для задачи (6.31); кроме того, $\left(x^*, \overset{*}{x}_{n+1}\right)$ вместе с x^* не является строго допустимым псевдопланом.

Применим к $\left(x^*, \overset{*}{x}_{n+1}\right)$ процедуру, описанную в предыдущем параграфе, и получим некоторый строго допустимый псевдоплан $(\bar{x}, \bar{x}_{n+1})$ задачи (6.31). Приняв этот псевдоплан за начальный, решим задачу (6.31) двойственным симплекс-методом в координатной форме, используя правило $2^{*\prime}$. В результате, как следует из теоремы 6.5, мы получим план $(\widehat{x}, \widehat{x}_{n+1})$ задачи (6.31), являющийся к тому же и строго допустимым псевдопланом. Тогда из леммы 6.1 получаем $(\widehat{x}, \widehat{x}_{n+1}) \succ (x^*, x_{n+1})$, откуда $\widehat{x} \succcurlyeq x^*$. По предположению, выполняется также неравенство $x^* \succcurlyeq \widehat{x}$, откуда $x^* = \widehat{x}$. Но тогда

$$\widehat{x}_{n+1} = M - \sum_{j\in\omega} \widehat{x}_j = M - \sum_{j\in\omega} \overset{*}{x}_j = \overset{*}{x}_{n+1}.$$

Таким образом, векторы $\left(x^*, \overset{*}{x}_{n+1}\right)$ и $\left(\widehat{x}, \widehat{x}_{n+1}\right)$ совпадают. Это противоречит тому, что один из них — строго допустимый, а другой — нет.

Следствие. *Если у задачи* (6.1) *существует строго допустимый псевдоплан, то множество* X^0 *ее решений ограничено.*

В самом деле, если x^0 — строго допустимый псевдоплан, то применив двойственный симплекс-метод в координатной форме и взяв x^0 в качестве начального псевдоплана, мы получим, согласно теоремам 6.5 и 6.10, решение лексикографической задачи (6.34). Теперь из теоремы 6.9 вытекает ограниченность множества X^0.

ГЛАВА VII. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В гл. V был описан метод решения задач линейного программирования общего вида. Несмотря на то что симплекс-метод решения задач линейного программирования является конечным, тем не менее число его итераций может быть весьма большим. Вместе с тем многие классы широко распространенных на практике задач линейного программирования обладают особенностями, выражающимися в специфическом строении матрицы A коэффициентов системы ограничений, которые позволяют существенно упростить общий метод решения применительно к данной задаче. При этом ускоряется процесс получения оптимального плана. В других случаях удается построить принципиально новый метод решения, приспособленный к определенному классу задач.

Одним из примеров задачи со специальной структурой матрицы ограничений является, например, транспортная задача, уже знакомая читателю (см. гл. I).

С другой стороны, часто встречаются задачи прикладного характера, математическая фомулировка которых приводит к задаче линейного программирования с некоторыми дополнительными ограничениями. Например, часто требуется, чтобы значения всех переменных были целочисленными. Несмотря на то что это требование никак не укладывается в рамки основных понятий линейного программирования, оказывается, что иногда методы линейного программирования существенно облегчают решение и таких задач.

§ 1. Транспортная задача и транспортные сети

Математическая модель транспортной задачи имеет следующий вид (см. (1.5), (1.6)):

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij},$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \tag{7.1}$$
$$x_{ij} \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m; \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Как отмечалось в гл. I, для допустимости задачи (7.1) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\sum_{j=1}^{n} b_j = D = \sum_{i=1}^{m} a_i,$$

т. е. спрос на перевозимый продукт должен совпадать с его предложением. Ясно также, что если задача (7.1) допустима, то она имеет решение. Это вытекает из ограниченности множества X допустимых планов. В самом деле, очевидно, что для любых индексов i, j выполняется неравенство $0 \leqslant x_{ij} \leqslant \min(a_i, b_j)$. Если расположить переменные x_{ij} следующим образом:

$$x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}, x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n}, \ldots, x_{m1}, x_{m2}, \ldots, x_{mn},$$

то матрица ограничений транспортной задачи примет вид

$$A = \left.\begin{pmatrix} \overbrace{1\ 1 \ldots 1}^{n} & \overbrace{0\ 0 \ldots 0}^{n} & \ldots & \overbrace{0\ 0 \ldots 0}^{n} \\ 0\ 0 \ldots 0 & 1\ 1 \ldots 1 & \ldots & 0\ 0 \ldots 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0\ 0 \ldots 0 & 0\ 0 \ldots 0 & \ldots & 1\ 1 \ldots 1 \\ 1\ 0 \ldots 0 & 1\ 0 \ldots 0 & \ldots & 1\ 0 \ldots 0 \\ 0\ 1 \ldots 0 & 0\ 1 \ldots 0 & \ldots & 0\ 1 \ldots 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0\ 0 \ldots 1 & 0\ 0 \ldots 1 & \ldots & 0\ 0 \ldots 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\\1\end{matrix}}\right\} m \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\\1\end{matrix}}\right\} n \end{matrix}\right. .$$

Нетрудно видеть, что ранг матрицы A равен $m+n-1$. Действительно, всего в матрице $m+n$ строк, и все эти строки линейно зависимы. Чтобы в этом убедиться, достаточно сложить первые m строк и вычесть сумму последних n; при этом получится нулевой вектор. С другой стороны, нетрудно заметить, что любые $m+n-1$ строк матрицы A линейно независимы.

Многие свойства планов транспортной задачи носят чисто комбинаторный характер. Данный параграф посвящен формулировке и изучению этих абстрактных свойств.

Определение 7.1. Пусть заданы конечное множество $P = \{P_1, P_2, \ldots, P_l\}$ точек (пунктов) P_i и множество $\mathscr{T}$ неупорядоченных пар (P_i, P_j), каждый элемент (пара) которого называется *дугой*. Совокупность $(P, \mathscr{T})$ назовем *транспортной сетью* и будем говорить, что дуга (P_i, P_j)

соединяет пункты P_i и P_j. Сами эти пункты назовем *концами дуги* (P_i, P_j).

Название «транспортная сеть» является данью интерпретации в связи с транспортной задачей. Обычно подобные объекты называют неориентированными графами. На рис. 7.1 представлены: множество P, состоящее из семи точек, и множество $\mathcal{T}$, содержащее шесть дуг

$$(P_1, P_5),\quad (P_2, P_5),\quad (P_2, P_6),\quad (P_3, P_6),\quad (P_3, P_7),\quad (P_4, P_6).$$

Определение 7.2. Произвольную конечную последовательность вида $P_{i_0}P_{i_1}P_{i_2}\ldots P_{i_k}$, где $P_{i_r} \in P$, $r = 0, 1, \ldots, k$, назовем *маршрутом*, если всякая пара $\left(P_{i_r}, P_{i_{r+1}}\right)$, $r = 0, 1, \ldots, k-1$, является дугой (т. е. $\left(P_{i_r}, P_{i_{r+1}}\right) \in \mathcal{T}$) и встречается в последовательности не более одного раза. Другими словами, маршрут — это непрерывная ломаная, составленная из дуг множества $\mathcal{T}$, причем все дуги маршрута различны.

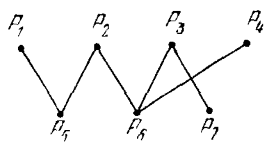

Рис. 7.1.

Так, для транспортной сети из рис. 7.1 маршрутами являются, например, последовательности $P_1P_5P_2P_6P_4$, $P_7P_3P_6P_2$.

Определение 7.3. Маршрут вида $P_{i_0}P_{i_1}P_{i_2}\ldots$ $\ldots P_{i_k}P_{i_0}$ называется *циклом*. Иначе говоря, цикл — это маршрут, по которому можно вернуться в исходный пункт.

Для пояснения скажем, что на рис. 7.1 циклов нет, но добавление дуги (P_4, P_7) привело бы к возникновению цикла $P_3P_7P_4P_6P_3$.

Определение 7.4. Транспортная сеть $(P, \mathcal{T})$ называется *связной*, если любые два ее пункта можно соединить маршрутом.

Понятия цикла и связной транспортной сети являются основными при построении специальных методов решения транспортной задачи.

Лемма 7.1. *Если из каждого пункта P_i выходит не менее двух дуг, то транспортная сеть содержит цикл.*

Доказательство. Рассмотрим маршрут максимальной длины, не содержащий цикла: $P_{i_0}P_{i_1}P_{i_2}\ldots$ $\ldots P_{i_{k-1}}P_{i_k}$. По предположению, из пункта P_{i_k} помимо дуги $\left(P_{i_{k-1}}, P_{i_k}\right)$ выходит по крайней мере еще одна дуга (P_{i_k}, P_{i_r}). Вместе с тем, данный маршрут максимален, т. е. добавление дуги (P_{i_k}, P_{i_r}) к нему невозможно. Это означает, что вершина P_{i_r} уже встречалась в маршруте:

$$P_{i_0}P_{i_1}\ldots P_{i_r}\ldots P_{i_{k-1}}P_{i_k}.$$

Тогда маршрут $P_{i_r}\ldots P_{i_{k-1}}P_{i_k}P_{i_r}$ является циклом.

Лемма 7.2. *Если транспортная сеть $(P, \mathscr{T})$ связна и из каждого пункта P_i выходят ровно две дуги, то эта транспортная сеть является циклом.*

Доказательство. По предыдущей лемме транспортная сеть $(P, \mathscr{T})$ содержит цикл $P_{i_0}P_{i_1}P_{i_2}\ldots P_{i_k}P_{i_0}$. Поскольку из каждого пункта P_{i_r}, $r = 0, 1, \ldots, k$, выходят только две дуги, то любой маршрут, выходящий из пункта P_{i_r}, участвующего в цикле, оканчивается также в одном из пунктов цикла. Если допустить, что в данном цикле участвуют не все пункты, т. е. найдется пункт $P_i \in P$ такой, что $P_i \neq P_{i_r}$, $r = 0, 1, \ldots, k$, то окажется, что, например, пункт P_{i_0} нельзя соединить маршрутом с P_i, что противоречит связности транспортной сети $(P, \mathscr{T})$.

Лемма 7.3. *Если пункт P_{i_0} связан маршрутом с пунктом P_{i_r}, а P_{i_r} — с пунктом P_{j_0}, $i_0 \neq j_0$, то P_{i_0} и P_{j_0} также можно связать маршрутом.*

Доказательство. Допустим, что последовательности

(1) $P_{i_0}P_{i_1}P_{i_2}\ldots P_{i_{r-1}}P_{i_r}$,

(2) $P_{j_0}P_{j_1}P_{j_2}\ldots P_{j_q}P_{i_r}$

являются маршрутами. Существует минимальный номер t такой, что пункт P_{i_t} участвует в маршруте (2). Найдем такой минимальный номер s, что $j_s = i_t$. Рассмотрим отрезки маршрутов (1) и (2): $P_{i_0}P_{i_1}P_{i_2}\ldots P_{i_t}$, $P_{j_0}P_{j_1}P_{j_2}\ldots$ $\ldots P_{j_{s-1}}P_{j_s}$. Согласно выбору t и s, $P_{i_t} = P_{j_s}$, а все остальные промежуточные пункты в этих маршрутах различны. Тогда последовательность $P_{i_0}P_{i_1}\ldots P_{i_t}P_{j_{s-1}}\ldots$ $\ldots P_{j_1}P_{j_0}$ является искомым маршрутом.

Иллюстрацией к доказательству данной леммы служит рис. 7.2.

Лемма 7.4. *Если транспортная сеть не содержит циклов, то любой маршрут однозначно определяется заданием конечных пунктов.*

Доказательство. Допустим, что утверждение леммы неверно и имеются два разных маршрута $P_{i_0}P_{i_1}\ldots P_{i_{r-1}}P_{i_r}$, $P_{i_0}P_{j_1}\ldots P_{j_q}P_{i_r}$. Пусть t — такой индекс, что $P_{i_s}=P_{j_s}$ при $s\leqslant t$ и $P_{i_{t+1}}\neq P_{j_{t+1}}$, h — такой индекс, что $P_{i_s}\neq P_{j_s}$ при $t<s<h$ и $P_{i_h}=P_{j_h}$. Поскольку концы обоих маршрутов совпадают, то требуемые индексы найдутся. Тогда последовательность $P_{i_t}P_{i_{t+1}}\ldots P_{i_h}P_{j_{h-1}}\ldots P_{j_t}$ является маршрутом, так как пара $(P_{i_h}, P_{j_{h-1}})=(P_{j_h}, P_{i_{h-1}})$ является дугой. Поскольку при этом $P_{i_t}=P_{j_t}$, то данный маршрут является циклом, что противоречит лемме.

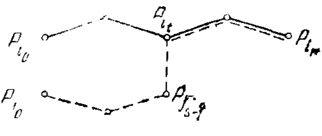

Рис. 7.2.

Иллюстрацией к доказательству леммы 7.4 служит рис. 7.3.

Лемма 7.5. *Пусть l — число элементов (пунктов) в множестве P. Если множество $\mathscr{T}$ содержит менее $l-1$ дуг, то транспортная сеть $(P, \mathscr{T})$ несвязна.*

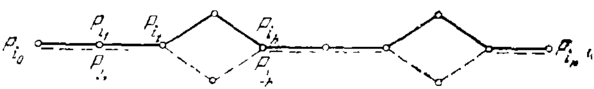

Рис. 7.3.

Доказательство. Воспользуемся полной математической индукцией. Если $l=2$, а число дуг в $\mathscr{T}$ меньше $l-1$ (т. е. в $\mathscr{T}$ нет дуг), то утверждение леммы выполняется.

Пусть утверждение уже доказано для транспортных сетей с числом пунктов l. Рассмотрим сеть, задаваемую множествами $P=\{P_0, P_1, P_2, \ldots, P_l\}$ и $\mathscr{T}$, в котором число дуг меньше l. В транспортной сети $(P, \mathscr{T})$ найдется пункт, из которого выходит единственная дуга. Действительно, если это не так, то число дуг должно быть не меньше числа $l+1$ пунктов. Пусть P_0 соединен дугой только с P_1. Рассмотрим сеть $(P, \tilde{\mathscr{T}})$, $P=\{P_1, \ldots, P_l\}$ и $\tilde{\mathscr{T}}=\mathscr{T}\setminus(P_0, P_1)$. Пара $(\tilde{P}, \tilde{\mathscr{T}})$ удовлетворяет предположению индукции; найдутся две точки P_i и P_j, $i\neq 0$, $j\neq 0$, которые нельзя соединить маршрутом. Ясно, что эти точки нельзя соединить маршрутом и в транспортной сети $(P, \mathcal{T})$.

Заметим, что транспортная сеть, содержащая ровно $l-1$ дуг, может быть связной, как показывает рис. 7.1.

Лемма 7.6. *Если транспортная сеть $(P, \mathcal{T})$ связна и не содержит циклов, то множество $\mathcal{T}$ состоит ровно из $l-1$ дуг, где l — число пунктов в множестве P.*

Доказательство. Вновь обратимся к математической индукции. При $l=2$ утверждение леммы тривиально. Допустим, что для транспортных сетей с числом пунктов l оно также доказано, и рассмотрим сеть, для которой $P=\{P_0, P_1, \ldots, P_l\}$. Поскольку транспортная сеть $(P, \mathcal{T})$ не содержит циклов, то согласно лемме 7.1, найдется пункт (пусть это будет P_0), из которого выходит ровно одна дуга (P_0, P_1) (одна дуга обязательно есть, так как сеть связна). Подобно тому, как мы это делали в предыдущей лемме, рассмотрим транспортную сеть $(\tilde{P}, \tilde{\mathcal{T}})$, где $\tilde{P}=$ $=\{P_1, \ldots, P_l\}$ и $\tilde{\mathcal{T}}=\mathcal{T}\setminus(P_0, P_1)$. Ясно, что пара $(\tilde{P}, \tilde{\mathcal{T}})$ удовлетворяет условиям леммы, поскольку им удовлетворяет транспортная сеть $(P, \mathcal{T})$. По предположению индукции, в $\tilde{\mathcal{T}}$ содержится ровно $l-1$ дуг. Следовательно, в $\mathcal{T}$ содержится l дуг — на единицу меньше, чем число пунктов в множестве P.

Из лемм 7.5 и 7.6 вытекает следующее

Следствие. *Если транспортная сеть $(P, \mathcal{T})$ связна и множество $\mathcal{T}$ состоит из l дуг, где l — число пунктов в P, то сеть $(P, \mathcal{T})$ содержит ровно один цикл.*

В самом деле, из леммы 7.6 следует, что транспортная сеть $(P, \mathcal{T})$ должна содержать циклы. Предположим, что в ней имеется два цикла. Очевидно, что выбрасывание из цикла одной произвольной дуги не может нарушить связности транспортной сети. Следовательно, удалив в каждом из двух циклов по одной дуге так, чтобы эти дуги были различны, получим связную транспортную сеть, в которой число дуг равно $l-2$, что противоречит лемме 7.5.

§ 2. Нахождение начального опорного плана транспортной задачи методом «северо-западного угла»

Как отмечалось в § 1, ранг матрицы ограничений транспортной задачи равен $m+n-1$. Из определения опорного плана и теоремы 5.3 вытекает, что существует оптимальный план, содержащий не более чем $m+n-1$ положительных перевозок x_{ij}. Разумеется, что поиск этого оптимального плана можно осуществлять с помощью симплекс-метода. Однако весьма специфический характер матрицы A позволяет предложить для транспортной задачи иной метод решения, значительно снижающий количество вычислений.

Поиск начального опорного плана (метод «северо-западного угла»).

Можно сразу указать один из допустимых планов перевозки, положив $x_{ij}=a_ib_j/D$, $i=1, 2, \ldots, m$; $j=1, 2, \ldots, n$. Однако этот план не является опорным. Начальный опорный план $\{x_{ij}^0\}$ можно построить с помощью следующей простой процедуры.

Рассмотрим таблицу 7.1. Здесь каждая пустая клетка соответствует одной из переменных x_{ij}, $i=1, 2, \ldots, m$; $j=1, 2, \ldots, n$. В ходе применения метода «северо-западного угла» пустые клетки будут заполняться значениями x_{ij}^0. В последнем столбце табл. 7.1 стоят числа a_i, $i=1, 2, \ldots, m$, обозначающие количество товара в каждом из пунктов хранения. В последней строке — числа, обозначающие потребность в данном товаре в каждом из пунктов назначения.

ТАБЛИЦА 7.1

				a_1
				a_2
				$\vdots$
				a_m
b_1	b_2	$\ldots$	b_n	

Отметим очевидные свойства данной таблицы:

1) сумма элементов в заполненных клетках i-й строки равна a_i;

2) сумма элементов в заполненных клетках j-го столбца равна b_j;

3) сумма элементов последнего столбца равна сумме элементов последней строки.

Клетка в «северо-западном» углу таблицы соответствует переменной x_{11}. Положим $x_{11}^0=\min\{a_1, b_1\}$. Если $x_{11}^0=a_1$ (т. е. $a_1 \leqslant b_1$), то это означает, что весь запас товара из первого пункта хранения направляется в первый пункт потребления. Следовательно, нужно положить $x_{1j}^0=0$ при $j=2, \ldots, n$. Таким образом, определены значения некоторых из переменных x_{ij}. Отразим это в таблице 7.2.

ТАБЛИЦА 7.2

a_1	0	...	0	0
				a_2
				$\vdots$
				a_m
b_1-a_1	b_2	...	b_n	

ТАБЛИЦА 7.3

b_1				a_1-b_1
0				a_2
$\vdots$				$\vdots$
0				a_m
0	b_2	...	b_n	

Здесь изменены также элементы последного столбца и последней строки таблицы в соответствии с «произведенной» перевозкой x^0_{ij}; теперь запас продукта в первом пункте хранения равен 0, а дополнительная потребность в перевозимом продукте в первом пункте потребления равна $b_1 - a_1$.

В случае, когда $x^0_{11} = b_1$ (т. е. $b_1 \leqslant a_1$), первый пункт потребления получил требуемое количество товара, и поэтому $x^0_{i1} = 0$ при $i = 2, \ldots, m$ (см. табл. 7.3).

Отметим, что свойства 1)—3) табл. 7.1 выполняются и для табл. 7.2 и 7.3.

ТАБЛИЦА 7.4

a_1	0	0	...	0	0
a_2	0	0	...	0	0
					a_3
					$\vdots$
					a_m
$b_1-a_1-a_2$	b_2	b_3	...	b_n	

ТАБЛИЦА 7.5

a_1	0	0	...	0	0
b_1-a_1					$a_2-b_1+a_1$
0					a_3
$\vdots$					$\vdots$
0					a_m
0	b_2	b_3	...	b_n	

После выполнения первого этапа в любом из двух возможных случаев получаем прямоугольную подматрицу незаполненных клеток, к которой применяем тот же прием. На втором этапе появляется одна из табл. 7.4—7.7.

Очевидно, что подобный процесс сохраняет свойства 1)—3) на каждом шаге. При этом величины x^0_{ij} получаются неотрицательными; в конце концов окажется заполненной вся таблица. По окончании последняя строка и последний столбец окажутся нулевыми. Этим доказывается, что полученный набор чисел $\{x_{ij}^0\}$, $i=1, 2, \ldots, m$, $j=1, 2, \ldots, n$, является планом перевозок.

ТАБЛИЦА 7.6

b_1	a_1-b_1	0	$\ldots$	0	0
0					a_2
0					a_3
$\vdots$					$\vdots$
0					a_m
0	$b_2-a_1+b_1$	b_3	$\ldots$	b_n	

ТАБЛИЦА 7.7

b_1	b_2				$a_1-b_1-b_2$
0	0				a_2
0	0				a_3
$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$
0	0				a_m
0	0	b_3	$\ldots$	b_n	

Проиллюстрируем этот метод на числовом примере. С целью экономии места мы не будем переписывать всю таблицу, а будем лишь приписывать новый последний столбец и новую последнюю строку. Пусть $a_1=6$, $a_2=8$, $a_3=3$, $a_4=9$, $a_5=14$; $b_1=10$, $b_2=18$, $b_3=7$, $b_4=5$. Как и должно быть, $\sum\limits_{i=1}^{5} a_i = 40 = \sum\limits_{j=1}^{4} b_j$. Результаты вычислений представлены таблицей 7.8.

ТАБЛИЦА 7.8

6	0	0	0	6	0	0	0	0	0	0	0	0
4	4	0	0	8	8	4	0	0	0	0	0	0
0	3	0	0	3	3	3	3	0	0	0	0	0
0	9	0	0	9	9	9	9	9	0	0	0	0
0	2	7	5	14	14	14	14	14	14	12	5	0
10	18	7	5									
4	18	7	5									
0	18	7	5									
0	14	7	5									
0	11	7	5									
0	2	7	5									
0	0	7	5									
0	0	0	5									
0	0	0	0									

Выяснение вопроса, является ли план $\{x_{ij}^0\}$, построенный по методу «северо-западного угла», опорным, оставим до следующего параграфа.

§ 3. Опорные планы транспортной задачи и вырожденность

Установим взаимосвязь между планами задачи линейного программирования (7.1) и транспортными сетями, введенными в § 1.

Пусть $\{x_{ij}\}$, $i=1, 2, \ldots, m$, $j=1, 2, \ldots, n$, — план задачи (7.1). Сопоставим этому плану транспортную сеть, определяемую парой $(P, \mathscr{T})$, где $P=S \cup Q$, S — множество всех пунктов S_i хранения (производства) перевозимого продукта, $i=1, 2, \ldots, m$; Q — множество всех пунктов Q_j потребления этого продукта, $j=1, 2, \ldots, n$; а $\mathscr{T}$ задается следующим образом. Дуга (S_i, Q_j) принадлежит $\mathscr{T}$ в том и только том случае, когда $x_{ij}>0$. Поскольку естественно считать, что все числа a_i, $i=1, 2, \ldots, m$, и b_j, $j=1, 2, \ldots, n$, описывающие запасы и потребность в пунктах S_i и Q_j соответственно, положительны, то из ограничений транспортной задачи вытекает, что в транспортной сети, сопоставленной любому плану $\{x_{ij}\}$, из всякого пункта выходит по крайней мере одна дуга: из всякого пункта хранения осуществляется хотя бы одна перевозка и наоборот, во всякий пункт потребления обязательно поступает товар.

Специфика транспортной сети, построенной таким образом, заключается в том, что множество $\mathscr{T}$ не содержит дуг вида (S_i, S_j), (Q_i, Q_j). Отсюда нетрудно получить следующее важное для дальнейшего утверждение: всякий цикл в транспортной сети $(S \cup Q, \mathscr{T})$ содержит четное число дуг.

Условимся обозначать через a^{ij} столбец матрицы A, соответствующей переменной x_{ij}. Тогда

$$a^{ij}=\begin{array}{c@{}l}\left(\begin{array}{c}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{array}\right) & \begin{array}{l}\\ \\ \\ (i)\\ \\ \\ \\ (m+j)\\ \\ \\ \\ \end{array}\end{array}, \quad a^{ij} \in \mathbf{R}^{m+n}.$$

Здесь в скобках указан номер координаты, значение которой равно 1.

Обозначим через $A(x)$ систему вектор-столбцов матрицы A, соответствующих положительным координатам плана

$$x = \{x_{ij}\}, \quad i = 1, 2, \ldots, m; \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Легко усмотреть соответствие между $A(x)$ и транспортной сетью, сопоставленной плану x, а именно $a^{ij} \in A(x)$ тогда и только тогда, когда дуга (S_i, Q_j) принадлежит транспортной сети.

Настало время применить сведения, полученные в § 1 о транспортных сетях, к планам задачи (7.1).

Теорема 7.1. *План $\{x_{ij}\}$ транспортной задачи* (7.1) *является опорным в том и только том случае, когда соответствующая транспортная сеть не содержит циклов.*

Доказательство. Как следует из определения 5.1, план $x = \{x_{ij}\}$ является опорным, если только система векторов $A(x)$ линейно независима. Следовательно, для доказательства теоремы нужно, в частности, показать, что если транспортная сеть, соответствующая плану x, содержит цикл

$$S_{i_1} Q_{j_1} S_{i_2} Q_{j_2} \ldots S_{i_k} Q_{j_k} S_{i_1},$$

то система векторов $A(x)$ линейно зависима.

В самом деле, из определения 7.3 цикла вытекает, что векторы $a^{i_1 j_1}, a^{i_2 j_1}, a^{i_2 j_2}, \ldots, a^{i_k j_k}, a^{i_1 j_k}$ принадлежат множеству $A(x)$. Вместе с тем, используя структуру столбцов матрицы A, нетрудно заметить, что

$$a^{i_1 j_1} - a^{i_2 j_1} + a^{i_2 j_2} - \ldots + a^{i_k j_k} - a^{i_1 j_k} = 0.$$

Таким образом, векторы a^{ij}, определяющие данный цикл, линейно зависимы. Следовательно, и вся система векторов $A(x)$, содержащая линейно зависимую подсистему, сама линейно зависима. Докажем утверждение теоремы в обратную сторону. Пусть система векторов $A(x)$ линейно зависима, т. е. существуют такие числа β_{ij}, что

$$\sum \beta_{ij} a^{ij} = 0, \tag{7.2}$$

где суммирование производится по всем таким парам (i, j), что $a^{ij} \in A(x)$. При этом по определению линейной зависимости не все $\beta_{ij} = 0$. Рассмотрим транспортную сеть

$(S \cup Q, \mathscr{T})$, соответствующую плану x, и транспортную сеть $(S \cup Q, \tilde{\mathscr{T}})$, определяемую следующим образом: дуга (S_i, Q_j) принадлежит $\tilde{\mathscr{T}}$ тогда и только тогда, когда $(S_i, Q_j) \in \mathscr{T}$ и $\beta_{ij} \neq 0$. Следовательно, $\tilde{\mathscr{T}} \subseteq \mathscr{T}$. Из вида столбцов матрицы A вытекает, что если $\beta_{ij} \neq 0$, то обязательно найдется столбец $a^{ip} \in A(x)$, $p \neq j$, для которого $\beta_{ip} \neq 0$; в противном случае i-я координата вектора $\sum \beta_{ij} a^{ij}$ равнялась бы $\beta_{ij} \neq 0$. Это означает, что в $\tilde{\mathscr{T}}$ найдется дуга вида (S_i, Q_p), где $p \neq j$.

Тем самым доказано, что из каждого пункта S_i выходит не менее двух дуг. Рассмотрение последних n координат столбцов матрицы A позволяет доказать аналогичное утверждение для пунктов Q_j. Из леммы 7.1 теперь вытекает, что транспортная сеть $(S \cup Q, \tilde{\mathscr{T}})$ содержит цикл. Этот же цикл принадлежит и сети $(S \cup Q, \mathscr{T})$.

Теорема 7.2. *План $x^0 = \{x^0_{ij}\}$, построенный по методу «северо-западного угла», является опорным.*

Доказательство. Согласно теореме 7.1 достаточно показать, что транспортная сеть, соответствующая плану x^0, не содержит циклов. Допустим, что эта транспортная сеть содержит цикл вида

$$S_{i_1} Q_{j_1} S_{i_2} Q_{j_2} \ldots S_{i_k} Q_{j_k} S_{i_1}.$$

Можно считать, что число i_1 минимально среди всех в данном цикле, т. е. $i_1 < i_r$, $r = 2, 3, \ldots, k$, иначе мы рассмотрели бы цикл

$$S_{i_1} Q_{j_2} \ldots S_{i_k} Q_{j_k} S_{i_1} Q_{j_1} S_{i_2}.$$

Наличие в транспортной сети, соответствующей плану x^0, пар (S_{i_1}, Q_{j_1}), (S_{i_1}, Q_{j_k}) говорит о том, что потребность в товаре одного из пунктов Q_{j_1}, Q_{j_k} полностью удовлетворена — это вытекает из способа построения плана x^0. Но в таком случае присутствие в сети одной из пар (S_{i_2}, Q_{j_1}), (S_{i_k}, Q_{j_k}) невозможно, поскольку распределение перевозок из пунктов S_{i_2} и S_{i_k} производится в методе «северо-западного угла» после того, как исчерпаны запасы в S_{i_1}. Теорема доказана.

Заметим, что план x^0 не обязан быть невырожденным, так как может случиться, что он имеет меньше чем $m + n - 1$ положительных компонент. Например, если $a_1 = b_1$, т. е. запасы в пункте S_1 равны потребности в продукте в пункте Q_1, то согласно методу «северо-западного угла» $x_{11}^0 = a_1$ и $x_{21}^0 = 0$, хотя пункт Q_1 формально остается в качестве потребителя и вектор a^{21} включается поэтому в базис плана x^0.

Напомним, что задача линейного программирования называется *вырожденной*, если у нее существует хотя бы один вырожденный опорный план. Оказывается, что для транспортной задачи выяснить, является ли она вырожденной, достаточно просто.

Теорема 7.3. *Транспортная задача (7.1) является вырожденной тогда и только тогда, когда суммарный запас товара в нескольких (не всех) пунктах хранения равен суммарной потребности нескольких (не всех) пунктов потребления, т. е. существуют собственные подмножества* $G \subset M = \{1, 2, \ldots, m\}$, $H \subset N = \{1, 2, \ldots, n\}$, *для которых*

$$\sum_{i \in G} a_i = \sum_{j \in H} b_j. \tag{7.3}$$

Доказательство. Поскольку имеет место равенство $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, то вместе с (7.3) выполняется равенство

$$\sum_{i \in M \setminus G} a_i = \sum_{j \in N \setminus H} b_j. \tag{7.4}$$

Рассмотрим транспортную задачу, в которой в качестве поставщиков выступают только пункты S_i, $i \in G$, а в качестве потребителей — пункты Q_j, $j \in H$. Пусть число элементов в G равно s, а в H равно t. Тогда, пользуясь методом «северо-западного угла», можно построить опорный план такой задачи, содержащий не более $s + t - 1$ положительных компонент. Аналогично, рассматривая транспортную задачу для второй группы поставщиков и потребителей, построим опорный план, включающей не более $(m - s) + (n - t) - 1$ перевозок. Совокупность всех введенных перевозок образует опорный план исходной транспортной задачи (6.1), содержащий не более $(m - s) + (n - t) - 1 + s + t - 1$ перевозок. Следовательно, если равенство (7.3) имеет место, то задача (7.1) вырождена — существует план, имеющий не более $m + n - 2$ положительных компонент, в то время как ранг матрицы ограничений равен $m + n - 1$.

Докажем теорему в обратную сторону. Если у задачи (7.1) существует вырожденный опорный план x, то число его положительных компонент меньше $m+n-1$. В таком случае соответствующая ему транспортная сеть несвязна (согласно лемме 7.5). Найдутся два пункта, например S_{i_0} и Q_{j_0}, которые нельзя связать маршрутом. Обозначим через H множество номеров всех пунктов Q_j, которые можно связать маршрутом с S_{i_0}. Отметим, что множество H непусто, так как пункт S_{i_0} связан дугой хотя бы с одним из пунктов Q_j. С другой стороны, $H \neq N$, так как

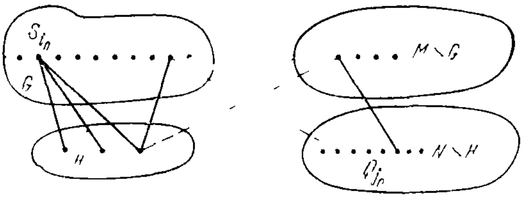

Рис. 7.4.

$j_0 \notin H$. Обозначим через G множество номеров всех пунктов S_i, каждый из которых можно связать маршрутом хотя бы с одним из пунктов с номером из множества H. Множество G непусто, поскольку $i_0 \in G$. Вместе с тем $G \neq M$. В самом деле, если $G = M$, то G содержит некоторый элемент i такой, что S_i связан с Q_{j_0}. Но тогда согласно лемме 7.3 существует маршрут, связывающий Q_{j_0} и S_{i_0}, что противоречит выбору Q_{j_0}. Очевидно, что ни один пункт S_i, $i \in G$, не может быть соединен маршрутом ни с одним пунктом Q_j, $j \in N \setminus H$, и ни один пункт Q_j, $j \in H$, не может быть соединен маршрутом ни с одним пунктом S_i, $i \in M \setminus G$.

Другими словами, дуг типа тех, что изображены на рис. 7.4 штриховыми линиями, существовать не может — это противоречило бы определению множеств G и H. Сказанное означает, что если $i \in G$ и $x_{ij} > 0$, то $j \in H$. Аналогично, если $j \in H$ и $x_{ij} > 0$, то $i \in G$. С учетом этого из системы ограничений задачи (7.1) вытекает, что

$$\sum_{j \in H} x_{ij} = a_i \qquad \forall i \in G,$$

$$\sum_{i \in G} x_{ij} = b_j \quad \forall j \in H,$$

откуда

$$\sum_{i \in G} a_i = \sum_{i \in G} \sum_{j \in H} x_{ij} = \sum_{j \in H} b_j.$$

§ 4. Метод потенциалов решения транспортной задачи

Метод решения транспортной задачи, который излагается в данном параграфе, является упрощенным вариантом модифицированного симплекс-метода (см. § 6 гл. V).

Будем рассматривать невырожденную транспортную задачу. Обозначим двойственные переменные (оценки), соответствующие первой группе ограничений задачи (7.1), через $-u_1, -u_2, \ldots, -u_m$, соответствующие второй группе ограничений — через $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Поскольку транспортная задача является канонической задачей линейного программирования, то на двойственные переменные не накладывается условие неотрицательности. Поэтому знак минус перед u_i никакой информации не несет и служит лишь для удобства изложения.

Построим задачу, двойственную к (7.1):

$$\max\left(\sum_{j=1}^{n} v_j b_j - \sum_{i=1}^{m} u_i a_i\right) \tag{7.5}$$
$$v_j - u_i \leqslant c_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Из теории двойственности следует, что план $\{x_{ij}\}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, задачи (7.1) является оптимальным, если существует план (u_i, v_j), $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, задачи (7.5), удовлетворяющий следующему условию: равенство $v_j - u_i = c_{ij}$ выполняется всякий раз, как только $x_{ij} > 0$.

Применим для решения задачи (7.1) модифицированный симплекс-метод.

Пусть $x^0 = \{x_{ij}^0\}$ — начальный опорный план. Уравнение $A'p^0 = c^0$, вытекающее из (5.41), с учетом строения матрицы A транспортной задачи (7.1) примет вид

$$v_j^0 - u_j^0 = c_{ij}, \tag{7.6}$$

где пара (i, j) пробегает все множество индексов базисных столбцов a^{ij} начального опорного плана x^0.

В отличие от общего случая, выражаемого формулой (5.41), система уравнений (7.6) очень проста, и ее решение находится немедленно. Поскольку, как отмечалось, одно из уравнений в системе ограничений транспортной задачи — лишнее, то можно положить $u_1^0 = 0$. Если в системе (7.6) уравнений имеется уравнение $u_{j_0}^0 - u_1^0 = c_{1j_0}$, то отсюда определяется величина $v_{j_0}^0 = c_{1j_0}$. Для вычисления другой переменной, например u_{i_0}, достаточно построить маршрут

$$Q_{j_0} S_{i_1} Q_{j_1} S_{i_2} \ldots S_{i_k} Q_{j_k} S_{i_0}.$$

Такой маршрут существует в силу того, что транспортная сеть, соответствующая опорному плану x^0, связна (так как задача предполагается невырожденной). Наличие данного маршрута означает, что среди уравнений (7.6) присутствуют уравнения

$$v_{j_0}^0 - u_{i_1}^0 = c_{i_1 j_0}, \quad v_{j_1}^0 - u_{i_1}^0 = c_{i_1 j_1}, \quad v_{j_1}^0 - u_{i_2}^0 = c_{i_2 j_1}, \ldots$$

$$v_{j_k}^0 - u_{i_k}^0 = c_{i_k j_k}, \quad v_{j_k}^0 - u_{i_0}^0 = c_{i_0 j_k}. \qquad (7.7)$$

Поскольку значение $v_{j_0}^0$ известно, то из этой системы уравнений можно последовательно определить значения $u_{i_1}^0, v_{j_1}^0, \ldots, u_{i_0}^0$.

Тем самым существенно упрощается выполнение этапов 1 и 3 в процедуре модифицированного симплекс-метода — нет нужды проводить вычисления по формулам (5.27)—(5.29). Формула (5.42) также принимает более простой вид:

$$\Delta_{ij}^0 = v_j^0 - u_i^0 - c_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \qquad (7.8)$$

Поскольку в транспортной задаче требуется минимизировать целевую функцию, то признак оптимальности здесь таков: если $\Delta_{ij}^0 \leqslant 0$, $\forall i, j$, то план $\{x_{ij}^0\}$ оптимален; если же $\Delta_{i_0 j_0}^0 > 0$, то план $\{x_{ij}^0\}$ не является оптимальным. Особенностью транспортной задачи является то, что в данном случае при поиске нового опорного плана этапы 2 и 3 модифицированного симплекс-метода можно опустить, заменив их более экономными вычислениями.

Рассмотрим вектор $a^{i_0 j_0}$. Согласно правилам симплекс-метода его следует вводить в базис. Иначе говоря, мы решили осуществить перевозку из пункта S_{i_0} в пункт Q_{j_0}, т. е. ввести дугу (S_{i_0}, Q_{j_0}), которой раньше не было. Поскольку система векторов $A(x^0) \cup a^{i_0 j_0}$ линейно зависима, то транспортная сеть, полученная присоединением к транспортной сети, соответствующей плану x^0, дуги (S_{i_0}, Q_{j_0}), согласно теореме 7.1 содержит циклы. Так как ранее она не обладала таким свойством, то, как утверждает следствие из лемм 7.5 и 7.6, такой цикл единствен. Очевидно, что этот цикл содержит дугу вида (S_{i_0}, Q_{j_0}), т. е. имеет вид

$$S_{i_0} Q_{j_0} S_{i_1} Q_{j_1} \ldots S_{i_k} Q_{j_k} S_{i_0}. \tag{7.9}$$

Данному циклу соответствует последовательность переменных

$$x_{i_0 j_0}, x_{i_1 j_0}, x_{i_1 j_1}, \ldots, x_{i_k j_k}, x_{i_0 j_k}. \tag{7.10}$$

Положим

$$x^1_{i_0 j_0} = x^0_{i_0 j_0} + \theta = \theta, \tag{7.11}$$

$$\left.\begin{aligned} x^1_{i_1 j_0} &= x^0_{i_0 j_0} - \theta, \\ x^1_{i_1 j_1} &= x^0_{i_1 j_1} + \theta, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x^1_{i_k j_k} &= x^0_{i_k j_k} + \theta, \\ x^1_{i_0 j_k} &= x^0_{i_0 j_k} - \theta, \end{aligned}\right\} \tag{7.12}$$

$x^1_{ij} = x^0_{ij}$ для остальных пар (i, j) индексов.

Смысл преобразования (7.11), (7.12) ясен: поскольку мы хотим в новый план включить перевозку из S_{i_0} в Q_{j_0} объемом θ, то для того, чтобы общий объем продукта, доставленного в Q_{j_0}, остался неизменным (равным b_{j_0}), следует уменьшить на эту же величину объем перевозки из пункта S_{i_1} в Q_{j_0}. Но при этом придется увеличить на θ объем перевозки из S_{i_1} в пункт Q_{j_1} с тем, чтобы не изменить общее количество продукта, вывозимого из S_{i_1}. Уменьшение перевозки из пункта S_{i_0} по последнему звену (S_{i_0}, Q_{j_k}) маршрута (7.9) оказывается компенсированным перевозкой по дуге (S_{i_0}, Q_{j_0}) (вспомним, что каждый цикл нашей транспортной сети содержит четное число дуг).

Остается позаботиться лишь о том, чтобы вектор $\{x^1_{ij}\}$, определяемый по формулам (7.11), (7.12), оказался опорным планом. Для этого, во-первых, необходимо, чтобы величина x^1_{ij} была неотрицательна для всех i, j. Добиться этого можно, положив

$$\theta = \min_{0 \leqslant r \leqslant k} x^0_{i_{r+1} j_r}, \tag{7.13}$$

где считается $i_{k+1} = i_0$.

Покажем, что план $\{x^1_{ij}\}$, построенный с учетом выбора θ по формуле (7.13), является опорным. Если допустить, что система векторов $A(x^1)$ линейно зависима, то это означает согласно теореме 7.1, что транспортная сеть, соответствующая плану x^1, содержит цикл вида (7.9). Однако такой цикл — единственный, так как в (7.9) все дуги, кроме первой, принадлежат транспортной сети, соответствующей опорному плану x^0 и поэтому содержащей единственный маршрут, соединяющий пункты Q_{j_0} и Q_{j_h}.

Поскольку цикл такого вида единствен, то удаление любой из дуг $(S_{i_{r+1}}, Q_{j_r})$ дает транспортную сеть без циклов. Согласно (7.12) и (7.13) хотя бы одна из переменных $x^1_{i_{r+1} j_r}$ равна нулю, и поэтому соответствующая дуга отсутствует в транспортной сети, соответствующей плану $\{x^1_{ij}\}$, что и доказывает нужное утверждение.

Осталось проверить, что при переходе к новому опорному плану $x^1 = \{x^1_{ij}\}$ значение линейной формы $\langle c, x\rangle$ уменьшилось. Для этого заметим, что векторы $a^{i_1 j_0}, a^{i_1 j_1}, \ldots, a^{i_k j_k}, a^{i_0 j_k}$ являются базисными для плана x^0 и, следовательно, для соответствующих двойственных переменных выполняются равенства (7.7). Отметим одно свойство равенств (7.7): если взять альтернативную сумму всех уравнений, в которой первым ставится знак минус, то левая часть суммы будет равна $u^0_{i_0} - v^0_{i_0}$, правую часть условно обозначим $\sum(\pm c_{ij})$. Рассмотрим теперь уравнения (7.12). Каждому из них соответствует та же пара индексов (i, j), что и уравнению с тем же номером в (7.7). Умножая равенства (7.11) на соответствующий коэффициент c_{ij} линейной формы и складывая, можно получить равенство вида

$$\sum c_{ij}\left(x^1_{ij} - x^0_{ij}\right) = \theta \sum(\pm c_{ij}),$$

где справа оказывается точно такая же альтернативная сумма, как и полученная из (7.7). Заметив, что $x^1_{i_0 j_0} - x^0_{i_0 j_0} = \theta$ и $x^1_{ij} - x^0_{ij} = 0$ для всех индексов, не участвующих в (7.12), получаем

$$\sum_i \sum_j c_{ij}\left(x_{ij}^1 - x_{ij}^0\right) = \theta c_{i_0 j_0} + \theta\left(u_{i_0}^0 - v_{j_0}^0\right) = \theta\left(-\Delta_{ij}^0\right) < 0.$$

Здесь мы пользуемся предположением о невырожденности плана x^0, считая, что $\theta > 0$.

Всеми предыдущими рассуждениями этого параграфа обоснована следующая последовательность этапов метода потенциалов решения транспортной задачи.

Имея начальный опорный план x^0, осуществляем:

Этап 1. По формуле (7.6) находим значения u_i^0, v_j^0, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, двойственных переменных.

Этап 2. По формуле (7.8) вычисляем значения Δ_{ij}^0, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Если все Δ_{ij}^0 неположительны, то план x^0 оптимален. Если $\Delta_{i_0 j_0}^0 > 0$, то переходим к следующему этапу.

Этап 3. Находим цикл вида (7.9) и по формулам (7.11)—(7.13) вычисляем новый опорный план x^1.

Этап 4. Приняв x^1 за начальный опорный план, возвращаемся к этапу 1 и начинаем новую итерацию.

Важной составной частью метода потенциалов решения транспортной задачи, как ясно из его описания, является отыскание на транспортной сети маршрута, соединяющего два заданных пункта. Эта операция присутствует в этапах 1 и 3 метода и заменяет все вычисления обычной симплекс-процедуры. Опишем один из возможных способов нахождения требуемого маршрута.

Рассматривается связная транспортная сеть без циклов, определяемая парой $(S \cup Q, \mathscr{T})$. Заданы пункты S_{i_0}, Q_{j_0} и требуется найти маршрут, их соединяющий. В первую очередь следует просмотреть все дуги множества $\mathscr{T}$. Если дуга (S_{i_0}, Q_{j_0}) принадлежит $\mathscr{T}$, то требуемый маршрут найден. В противном случае, когда $(S_{i_0}, Q_{j_0}) \notin \mathscr{T}$, присоединим данную дугу к транспортной сети $(S \cup Q, \mathscr{T})$, т. е. будем рассматривать сеть $(S \cup Q, \tilde{\mathscr{T}})$, где $\tilde{\mathscr{T}} = \mathscr{T} \cup (S_{i_0}, Q_{j_0})$.

В транспортной сети $(S \cup Q, \mathscr{T})$ существует маршрут, соединяющий S_{i_0} и Q_{j_0}. Присоединение дуги (S_{i_0}, Q_{j_0}) делает такой маршрут неединственным в $(S \cup Q, \tilde{\mathscr{T}})$, из чего на основании леммы 7.4 заключаем, что транспортная сеть $(S \cup Q, \tilde{\mathscr{T}})$ содержит цикл. Как уже отмечалось в этом параграфе, любой цикл в $(S \cup Q, \widetilde{\mathscr{T}})$ должен иметь вид (7.9). Если этот цикл удастся найти, то маршрут

$$Q_{j_0} S_{i_1} Q_{j_1} \ldots Q_{j_k} S_{i_0}$$

и будет искомым.

Таким образом, задача отыскания маршрута сведена к задаче отыскания цикла вида (7.9). Эта же проблема является основной и на этапе 3 метода потенциалов.

Поиск цикла вида (7.9) в транспортной сети $(S \cup Q, \widetilde{\mathscr{T}})$ осуществим следующим образом.

Для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant m$, рассматриваются пары вида $(S_i, Q_j) \in \widetilde{\mathscr{T}}$. Если таких пар нет или есть только одна, то пункт S_i удаляется из транспортной сети $(S \cup Q, \widetilde{\mathscr{T}})$. Вновь получившуюся транспортную сеть обозначим $(S^{(1)} \cup Q, \widetilde{\mathscr{T}}^{(1)})$. Для каждого j, $1 \leqslant j \leqslant n$, рассматриваются пары вида $(S_i, Q_j) \in \widetilde{\mathscr{T}}^{(1)}$. Если таких пар нет или есть только одна, то пункт Q_j удаляется из транспортной сети $(S^{(1)} \cup Q, \widetilde{\mathscr{T}}^{(1)})$. Вновь полученную транспортную сеть обозначим $(S^{(1)} \cup Q^{(1)}, \widetilde{\mathscr{T}}^{(1)})$. Заметим, что для каждого пункта S_i или Q_j, участвующего в цикле, найдутся по крайней мере две пары, его содержащие. Поэтому ни один из этих пунктов не выбрасывается.

Может представиться две возможности.

1) В результате описанной процедуры транспортная сеть $(S \cup Q, \widetilde{\mathscr{T}})$ не изменилась — ни один из пунктов S_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, Q_j, $1 \leqslant j \leqslant n$, не удалось удалить, и поэтому $(S^{(1)} \cup Q^{(1)}, \widetilde{\mathscr{T}}^{(1)}) = (S \cup Q, \widetilde{\mathscr{T}})$.

2) Общее число пунктов S_i и Q_j уменьшилось хотя бы на 1.

Лемма 7.7. *Если $(S^{(1)} \cup Q^{(1)}, \widetilde{\mathscr{T}}^{(1)}) = (S \cup Q, \widetilde{\mathscr{T}})$, то транспортная сеть $(S \cup Q, \widetilde{\mathscr{T}})$ является циклом.*

Доказательство. Пусть s и q — число точек в S и Q соответственно. Поскольку сеть $(S \cup Q, \mathscr{T})$ связна и не содержит циклов, то согласно лемме 7.6 множество $\mathscr{T}$ содержит $s + q - 1$ дуг. В таком случае $\widetilde{\mathscr{T}}$ содержит ровно $s + q$ дуг. Из условия леммы вытекает, что из каждого пункта S_i и Q_j выходит не менее двух дуг. Нетрудно видеть, что в таком случае из каждого пункта выходят ровно две дуги и, следовательно, $s = q$. Ссылка на лемму 7.2 заканчивает доказательство.

Таким образом, в случае 1) нужно строить произвольный маршрут максимальной длины, начинающийся в пункте S_{i_0}, — он и окажется требуемым циклом.

В случае 2) следует повторить описанную процедуру последовательного удаления пунктов из транспортной сети. Поскольку исходная сеть $(S \cup Q, \widetilde{\mathcal{T}})$ содержит цикл, то после некоторого количества повторений процедуры мы обязательно придем к случаю 1).

Отметим, что логические операции, составляющие содержание описанной процедуры поиска нужного маршрута гораздо более экономны в смысле затрат времени ЭВМ по сравнению с арифметическими операциями симплекс-метода.

В заключение обратим внимание на любопытную особенность транспортной задачи.

Теорема 7.4. *Если все числа* a_i, b_j, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$ — *целые, то задача* (7.1) *имеет целочисленное решение.*

Доказательство. В случае, когда все числа a_i, b_j — целые, начальный опорный план, получаемый по методу «северо-западного угла», является, очевидно, целочисленным. Кроме того, на каждой итерации метода потенциалов число θ, определяемое по формуле (7.13), является целым, если опорный план x^0 — целочисленный. Следовательно, всякий новый опорный план x^1, определяемый по формулам (7.11), (7.12), является целочисленным вместе с исходным планом x^0.

Поскольку, действуя методом потенциалов, мы за конечное число шагов получаем решение задачи, то справедливость утверждения теоремы не вызывает сомнений.

Отметим, что метод потенциалов обоснован нами лишь для невырожденной транспортной задачи, поэтому и утверждение теоремы 7.4 доказано лишь для этого случая. Однако оно справедливо для любой транспортной задачи, как показывает следующее более сильное утверждение.

Теорема 7.5. *Если все числа* a_i, b_j, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, — *целые, то любой опорный план транспортной задачи* (7.1) *целочислен.*

Доказательство. Отметим следующие свойства матрицы A транспортной задачи.

1. Каждый элемент матрицы A равен либо 0, либо 1.

2. Каждый столбец содержит не более двух ненулевых элементов.

3. Строки матрицы A можно разбить на два множества B и C, где B состоит из m первых строк, а C — из n последних, причем если два ненулевых элемента лежат в одном столбце матрицы A, то строки, содержащие эти элементы, принадлежат разным множествам B и C, т. е. если $a_{i_1 j} = 1$, $a_{i_2 j} = 1$ и $a_{i_1} \in B$, то $a_{i_2} \in C$.

Покажем, что значение каждого минора матрицы A равно 0, 1, -1.

Любая подматрица матрицы A, очевидно, обладает свойствами 1—3. Поэтому достаточно показать, что любая квадратная матрица A, обладающая этими свойствами, имеет определитель, равный 0, 1, -1. Проведем доказательство индукцией по порядку квадратной $(k \times k)$-матрицы A. Для $k = 1$ утверждение совпадает со свойством 1. Пусть утверждение верно для квадратных матриц порядка $k-1$ и пусть A — квадратная матрица порядка k.

Если каждый столбец матрицы A имеет ровно два ненулевых элемента, то из свойства 3 вытекает, что сумма всех строк множества B равна сумме всех строк множества C. Следовательно, в этом случае строки матрицы A линейно зависимы, и $|A| = 0$. Если в некотором столбце все элементы равны нулю, то вновь $|A| = 0$. Остается рассмотреть случай, когда в каком-либо столбце матрицы A имеется ровно один ненулевой элемент. Разложим определитель матрицы A по этому столбцу. Тогда $|A| = \pm|\bar{A}|$, где $\bar{A}$ — подматрица, получаемая вычеркиванием в матрице A выделенного столбца и строки, содержащей ненулевой элемент этого столбца. Порядок квадратной матрицы $\bar{A}$ равен $k-1$, и по индуктивному предположению $|\bar{A}| = 0, \pm 1$, откуда и имеем $|A| = 0, \pm 1$.

Теперь нетрудно доказать утверждение теоремы. Пусть $x = \{x_{ij}\}$ — опорный план задачи (7.1), т. е. $Ax = \tilde{b}$, $x \geqslant 0$, где $\tilde{b} = (a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_n)$. Обозначим через A_σ матрицу, составленную из вектор-столбцов матрицы A — базиса опорного плана x, а через x_σ — вектор, составленный из положительных координат опорного плана x. Тогда $A_\sigma x_\sigma = \tilde{b}$. Решая эту квадратную систему уравнений по правилу Крамера, получаем, что

$$x_{ij} = |A_{ij}|/|A_\sigma|,$$

где A_{ij} — матрица, полученная из A_σ заменой столбца a^{ij} на вектор $\tilde{b}$. Поскольку все элементы матрицы A_{ij} — целые числа, то и число $|A_{ij}|$ — целое. С учетом того, что $|A_\sigma| = \pm 1$, получаем утверждение теоремы.

Для случая вырожденной транспортной задачи разработаны специальные приемы ее решения, как это имеет место и в симплекс-методе, однако мы на этом останавливаться не будем.

§ 5. Целочисленные задачи линейного программирования

1. Задача о ранце. Здесь речь идет о собравшемся в поход путешественнике, который должен упаковать в ранец различные полезные предметы n наименований, причем могут потребоваться несколько одинаковых предметов. Имеется m ограничений такого типа, как вес, объем, линейные размеры и т. д. Пусть a_{ij} — i-я характеристика предмета j-го наименования, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, b_i — ограничение по весу, объему и т. д. Обозначим через x_j количество предметов j-го наименования, запланированное к загрузке в ранец, $j = 1, 2, \ldots, n$. Считается, что известна полезность c_j одного предмета j. Тогда математическая формулировка задачи о ранце имеет вид

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \qquad (7.14)$$

$$x_j \geqslant 0, \ x_j \text{ — целое}, \ j = 1, 2, \ldots, n.$$

Видим, что данная задача не является задачей линейного программирования — требование целочисленности нельзя выразить линейными неравенствами. Вместе с тем к задачам подобного вида приводится большое число проблем практического характера. Так было и с первоначальной постановкой задачи о ранце, только, к сожалению, речь шла о загрузке бомбардировщиков бомбовым запасом.

2. Задача о назначениях. Имеется n различных самолетов, которые требуется распределить между n авиалиниями. Известно, что на j-й авиалинии i-й самолет будет приносить доход c_{ij}. Требуется так распределить самолеты, чтобы максимизировать суммарный доход.

Положим

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } i\text{-й самолет направлен на } j\text{-ю авиалинию}, \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Математическая модель записывается следующим образом:

$$\max \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \qquad (7.15)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

x_{ij} равно либо 0, либо 1.

Ограничения этой задачи отражают требования, что каждый самолет назначается только на одну авиалинию и на каждую авиалинию назначается один самолет.

3. Задача о коммивояжере. Имеются города, занумерованные числами 0, 1, 2, ..., n. Выехав из города 0, коммивояжер должен объехать все остальные города, побывав в каждом из них по одному разу, и вернуться в исходный город. Известны расстояния c_{ij} между городами i, j ($i, j = 0, 1, 2, \ldots, n$). Требуется найти самый короткий маршрут.

Введем переменные

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если коммивояжер из города } i \\ & \text{переезжает в город } j, \quad i \neq j, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$i, j = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Кроме того, потребуются дополнительные переменные u_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Рассмотрим задачу

$$\min \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{i=0}^{n} x_{ij} = 1, \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \qquad (7.16)$$

$$\sum_{j=0}^{n} x_{ij} = 1, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (7.17)$$

$$u_i - u_j + n x_{ij} \leqslant n - 1, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n, \qquad (7.18)$$

x_{ij} равно либо 0, либо 1.

Здесь переменные u_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, участвуют только в ограничениях задачи, но не в целевой функции. Их роль вспомогательна, но, как будет показано ниже, необходима.

Убедимся, что формальная модель (7.16)—(7.18) эквивалентна задаче о коммивояжере. Условия (7.16) означают, что коммивояжер приезжает в город $j \neq 0$ только один раз. Из (7.17) следует, что коммивояжер выезжает из города $i \neq 0$ ровно один раз.

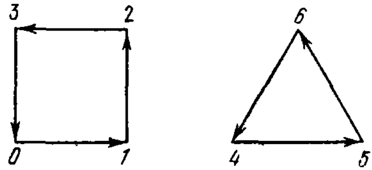

Рис. 7.5.

Однако условия (7.16) и (7.17) вместе не обеспечивают связности маршрута. Например, маршрут, изображенный на рис. 7.5, удовлетворяет (7.16) и (7.17), но не подходит под условия задачи о коммивояжере.

Оказывается, что условия (7.18), выглядящие несколько искусственно, предназначены обеспечить связность маршрута коммивояжера. Более точно, эти условия запрещают любой цикл, не проходящий через город 0.

В самом деле, рассмотрим некоторое решение ($\{x_{ij}\}$, $\{u_i\}$) задачи (7.16)—(7.18). Сопоставим плану $\{x_{ij}\}$ транспортную сеть так, как это делалось в § 2 для планов транспортной задачи: дуга (i, j) принадлежит сети тогда и только тогда, когда $x_{ij} = 1$. Как уже отмечалось, условия (7.16), (7.17) обусловливают тот факт, что в данной транспортной сети с каждым городом связано ровно две дуги.

Из леммы 7.1 тогда следует, что эта сеть содержит циклы. Допустим, что имеется цикл, не проходящий через город 0 и состоящий из k дуг. Суммируем неравенства (7.18), соответствующие дугам (i, j) этого цикла. Отметим, что это можно сделать, поскольку для всех дуг (i, j) цикла найдется в (7.18) соответствующее неравенство, так как $i \neq 0$, $j \neq 0$ (цикл не проходит через точку 0). При суммировании все величины u_i уничтожаются (с учетом цикличности маршрута), и получаем противоречивое неравенство $nk \leqslant (n-1)k$. Следовательно, любое решение задачи (7.16)—(7.18) соответствует циклу, проходящему через город 0. Отсюда легко вывести, что в таком случае этот цикл единствен для данного плана $\{x_{ij}\}$.

Осталось показать, что любому маршруту коммивояжера соответствует план задачи (7.16)—(7.18).

Возьмем произвольный цикл, начинающийся в точке 0:

$$l_0 l_1 l_2 \ldots l_n l_0,$$

где $l_0 = 0$, все l_r различны, $1 \leqslant l_r \leqslant n$, $r = 1, 2, \ldots, n$.

Рассмотрим следующий план задачи: числа x_{ij} берем в соответствии с общей интерпретацией этих переменных. Значения u_i определим по формуле: если $i = l_r$, то $u_i = r$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Другими словами, число u_i равно порядковому номеру города i по маршруту следования. Покажем, что таким образом определенный набор чисел $\{x_{ij}\}$, $i, j=0, 1, 2, \ldots, n$; $\{u_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, является планом задачи (7.16)—(7.18).

Заметим, что поскольку $1 \leqslant u_i \leqslant n$, то $u_i - u_j \leqslant n - 1$ для всех $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Отсюда вытекает справедливость (7.18) для любых (i, j), когда $x_{ij} = 0$. Если же $x_{ij} = 1$, $i, j \neq 0$, то, как следует из построения данного плана, $i = l_r$, $j = l_{r+1}$ для некоторого r, $1 \leqslant r \leqslant n - 1$. Тогда $u_i = r$, $u_j = r + 1$ и $u_i - u_j = 1$. Отсюда

$$u_i - u_j + nx_{ij} = n - 1.$$

4. Задача о четырех красках. В 1976 г. была доказана замечательная теорема: любую географическую карту можно раскрасить, используя не более четырех различных красок (см. [23]). Тем самым была решена одна из наиболее знаменитых и старых математических проблем. Показательно, что обоснование этого результата проделано с помощью ЭВМ: после теоретических рассуждений осталось большое, но конечное число карт, относительно которых только и не было известно, можно ли их раскрасить четырьмя красками. С помощью ЭВМ был получен положительный ответ, который и дал окончательное решение проблемы.

Уточним формулировку задачи. Дана плоская географическая карта, на которой граница каждой страны представляет собой замкнутую непрерывную кривую. Две страны называются соседними, если у них есть общая граница — участок кривой положительной длины. Требуется так раскрасить данную карту в четыре цвета, чтобы соседние страны были раскрашены в разные цвета.

Покажем, как указанную проблему можно свести к целочисленной задаче линейного программирования.

Пусть страны занумерованы индексами $j=1, 2, \ldots, n$, x_j — целочисленная переменная, могущая принимать четыре значения 0, 1, 2, 3, соответственно количеству красок. Обозначим через Γ множество всех пар (i, j) индексов, соответствующих соседним странам:

$$\Gamma = \{(i, j) \mid \text{страны } i, j \text{ — соседние, } i, j = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Тогда для любой пары $(i, j) \in \Gamma$ значения x_i и x_j должны быть различны, т. е. $x_i \neq x_j$. С учетом целочисленности переменных это означает, что либо $x_j - x_i \geqslant 1$, либо $x_i - x_j \geqslant 1$.

С тем чтобы отразить эту альтернативу линейными неравенствами, введем дополнительные переменные u_{ij} для всех пар $(i, j) \in \Gamma$. Переменные u_{ij} могут принимать два значения, 0 и 1, причем из условий, которые следуют ниже, вытекает, что $u_{ij}=1$, если $x_i < x_j$, и $u_{ij}=0$, если $x_i > x_j$.

Рассмотрим неравенства $x_i - x_j \geqslant 1 - 4u_{ij}$, $x_j - x_i \geqslant -3 + 4u_{ij}$. Если $u_{ij}=1$, то $x_i - x_j \geqslant -3$, $x_j - x_i \geqslant 1$. Первое неравенство в данном случае лишнее — оно выполняется при всех допустимых значениях x_i, x_j, а второе обеспечивает, что $x_j > x_i$. Аналогично, при $u_{ij}=0$ получаем $x_i - x_j \geqslant 1$.

Теперь можно сформулировать целочисленную задачу, эквивалентную проблеме четырех красок.

Требуется найти решение системы линейных неравенств

$$x_i - x_j + 4u_{ij} \geqslant 1, \quad x_j - x_i - 4u_{ij} \geqslant -3, \quad (i, j) \in \Gamma,$$

при дополнительных условиях на переменные

$$x_j = 0, 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$
$$u_{ij} = 0, 1, \quad (i, j) \in \Gamma.$$

5. Обсудим изложенные задачи линейного целочисленного программирования. Формальная запись каждой из них отличается от обычных задач линейного программирования лишь дополнительными ограничениями на значения переменных, откуда и происходит название этих задач. Содержательных моделей, важных в смысле практических приложений и приводящих к формальным задачам, подобным изложенным в данном параграфе, очень много. На первых порах требование целочисленности переменных явилось существенным препятствием для исследования и решения таких задач. Самым естественным путем было

попытаться использовать обычные методы линейного программирования, несколько видоизменив их. Так, можно думать, что решение целочисленной задачи линейного программирования может быть получено следующим образом: достаточно решить эту задачу любым из численных методов линейного программирования, не обращая внимания на требование целочисленности переменных, а затем округлить все координаты полученного решения до целых чисел. Однако даже простые примеры показывают несостоятельность такого «инженерного» подхода. Рассмотрим, например (см. [24]), задачу

$$\max (x_1 - 3x_2 + 3x_3)$$

$$-3x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant 3,$$

$$4x_1 - 3x_2 \leqslant 2,$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 \leqslant 4,$$

$$x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \text{ — целые.}$$

Решая эту задачу без условия целочисленности, находим оптимальный план $x_1 = 1/2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 4\,1/2$. Можно записать четыре варианта «округления» этого плана: (0, 0, 4), (0, 0, 5), (1, 0, 4), (1, 0, 5). Легко убедиться, что ни один из этих четырех векторов не является планом для нашей задачи и далек от оптимального целочисленного решения $x_1 = 2$, $x_2 = 2$, $x_3 = 5$.

Тем не менее, некоторые из целочисленных задач могут быть непосредственно сведены к задачам линейного программирования. Так, обратимся к задаче о назначениях (7.15) и заменим условие на переменные x_{ij} неравенством $x_{ij} \geqslant 0$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. После такого преобразования задача о назначениях принимает вид транспортной задачи (7.1). Поскольку числа в правых частях ограничений (7.15) — целые, то по теореме 7.5 все опорные планы такой задачи целочисленны. Следовательно, любой из численных методов линейного программирования дает целочисленное решение задачи (7.15). Условие же неотрицательности и остальные ограничения типа равенства задачи (7.15) обеспечат, чтобы каждая компонента этого решения была равна либо 0, либо 1.

Однако целочисленную задачу линейного программирования более общего вида, такого, как задача о ранце (7.14), уже нельзя свести к обычной задаче линейного программирования. Поэтому теория решения этих задач развивалась в двух направлениях. Одно из них, предназначенное для решения общей целочисленной задачи линейного программирования, носит название «метод отсечения» и реализует идею сопоставления целочисленной задаче линейного программирования некоторой обычной задачи линейного программирования, решение которой позволяет найти и решение целочисленной.

Второе направление состоит в разработке для специфических целочисленных задач линейного программирования (типа задачи о коммивояжере) принципиально новых комбинаторных приемов. Группа наиболее популярных таких методов носит название «метод ветвей и границ». Отметим, что и здесь используются свойства соответствующих задач линейного программирования.

В следующих параграфах будет изложен лишь первый из упомянутых подходов к решению целочисленных задач линейного программирования. Избегая вдаваться в технические подробности, мы рассмотрим самую простую ситуацию с тем, чтобы дать ясное представление о сути и возможностях данного метода. Более подробно об алгоритмах решения целочисленных задач рассказано в [24].

§ 6. Метод отсечения для целочисленных задач линейного программирования

1. Будем рассматривать каноническую задачу с дополнительным требованием целочисленности переменных:

$$\max \langle c, x\rangle \tag{7.19}$$

$$Ax = b, \tag{7.20}$$

$$x \geqslant 0, \tag{7.21}$$

x — целочисленный вектор.

Условие целочисленности переменных существенно осложняет задачу линейного программирования (7.19), (7.20). Так, может случиться, что задача (7.19)—(7.21) обладает допустимыми (целочисленными) планами, целевая функция ограничена на допустимом множестве, однако ее максимум не достигается. Например, в задаче

$$\max (\sqrt{2}x_1 - x_2)$$
$$\sqrt{2}x_1 - x_2 + x_3 = 1, \quad x_1, x_2, x_3 \geqslant 0,$$

не существует целочисленных решений, в то время как без этого условия решением служит любой вектор вида $((1+\alpha)/\sqrt{2}, \alpha, 0)$, $\alpha \geqslant 0$.

В связи со сказанным, при обосновании численных алгоритмов решения задач типа (7.19)—(7.21) приходится накладывать различные дополнительные условия.

С целью упростить изложение мы наложим на задачу (7.19)—(7.21) самые сильные из возможных ограничений.

I. Будем считать, что множество X планов задачи (7.19), (7.20) (без условия целочисленности) ограничено, т. е. является многогранником.

Из этого предположения вытекает, что множество $\tilde{X}$ всех целочисленных планов задачи (7.19)—(7.21) конечно.

II. Будем предполагать, что все коэффициенты c_j, $j=1, 2, \ldots, n$, целевой функции — целые числа.

Из условия II вытекает, что для всякого целочисленного плана $x \in \tilde{X}$ значение $\langle c, x \rangle$ максимизируемой линейной формы — целое число. В этом случае говорят, что гарантирована целочисленность целевой функции.

Хотя условия I и II на задачу (7.19)—(7.21) довольно жесткие, однако ослабить их так, чтобы последующие результаты были верны, можно лишь ненамного.

2. Существует принципиальная возможность свести решение задачи (7.19)—(7.21) к нахождению оптимального плана некоторой задачи линейного программирования (без условия целочисленности переменных). Пусть, как обычно, X — многогранное множество, определяемое условиями (7.19), (7.20). Через $\tilde{X}$ обозначим множество всех целочисленных векторов $\tilde{x}$, лежащих в X. Другими словами, $\tilde{X}$ задается условиями (7.19)—(7.21), т. е.

$$\tilde{X} = \{\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n) \,|\, x \in X, \quad \tilde{x}_i \text{ — целое число}, \quad i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

По определению $\tilde{X} \subseteq X$. Будем обозначать через $X^{ц}$ выпуклую оболочку множества $\tilde{X}$: $X^{ц} = C(\tilde{X})$ (см. определение 2.9). Тогда $X^{ц} \subseteq X$.

Таким образом, мы сопоставили многогранному множеству X некоторое выпуклое множество $X^{ц} \subseteq X$ согласно следующему правилу: $X^{ц}$ есть минимальное выпуклое множество, содержащее все целочисленные векторы из X.

По предположению I, X является многогранником, следовательно, множество $\tilde{X}$ конечно. Из теоремы 2.14 вытекает, что выпуклое множество $X^{ц}$ также является многогранником. Привлекая теорему 2.26 об эквивалентности двух определений многогранного множества, получаем, что $X^{ц}$ можно задать конечным числом линейных неравенств.

Чтобы подчеркнуть основное отличие множества $X^{ц}$ от множества X, дадим следующее определение.

Определение 7.5. Многогранник, все крайние точки которого целочисленны (т. е. все их координаты суть целые числа), называется *целочисленным многогранником.*

Очевидно, что многогранник $X^{ц}$ — целочисленный, поскольку его крайними точками могут служить лишь точки множества $\tilde{X}$ целочисленных планов.

Оправданием для изучения соответствия $X \to X^{ц}$ является следующий простой факт.

Теорема 7.6. *Любой оптимальный опорный план задачи линейного программирования*

$$\begin{gathered} \max \langle c, x\rangle \\ x \in X^{ц}, \end{gathered} \tag{7.22}$$

является решением задачи (7.19)—(7.21).

Доказательство. Пусть $\tilde{x}^*$ — оптимальный опорный план задачи (7.22), x^* — какое-то решение исходной задачи (7.19)—(7.21). Поскольку $\tilde{x}^* \in X^{ц} \subseteq X$, то $\langle c, \tilde{x}^*\rangle \leqslant \langle c, x^*\rangle$. С другой стороны, так как x^* — целочисленный план, то $x^* \in \tilde{X} \subseteq X^{ц}$, и поэтому $\langle c, \tilde{x}^*\rangle \geqslant \langle c, x^*\rangle$, откуда $\langle c, \tilde{x}^*\rangle = d$, где d — значение задачи (7.19)—(7.21). Доказательство закончено.

Подчеркнем, что теорема 7.6 утверждает лишь принципиальную возможность сведения решения задачи целочисленного линейного программирования к поиску опорных планов задачи линейного программирования вида (7.22). Основная трудность в использовании этой возможности состоит в явном задании многогранника $X^{ц}$ системой линейных неравенств с тем, чтобы затем применить для решения задачи (7.22) численные методы линейного программирования. Вероятнее всего, что в вычислительном отношении эта проблема столь же сложна, как и исходная задача поиска оптимального целочисленного плана.

Несмотря на это, идея «сужения» множества X оказалась полезной и привела к созданию нескольких алгоритмов решения целочисленных задач линейного программирования, носящих название «методы отсечения».

3. Изложим идею методов отсечения. Допустим, что удалось эффективно построить последовательность $\{\mathscr{L}_r\}$, $r = 0, 1, 2, \ldots$, задач линейного программирования, каждая из которых определяется своим многогранником X_r и одной для всех целевой функцией $\langle c, x\rangle$:

$$\mathscr{L}_r\colon \max\langle c, x\rangle \qquad x\in X_r, \tag{7.23}$$

причем эта последовательность задач обладает следующими свойствами:

1) $X_0=X$, т. е. в качестве X_0 берется множество планов задачи (7.19), (7.20);

2) $X_r^{ц}=X^{ц}$, $r=1, 2, \ldots$;

3) если при решении задачи $\mathscr{L}_r$ полученный оптимальный вектор $\overset{*}{x}_r$ не удовлетворяет условию целочисленности, то он не является планом задачи $\mathscr{L}_{r+1}$, т. е. $\overset{*}{x}_r\notin X_{r+1}$.

Отметим, что если на каком-то шаге r вектор $\overset{*}{x}_r$ — решение задачи $\mathscr{L}_r$ — оказался целочисленным, то он и является решением исходной задачи (7.19)—(7.21) в силу свойства 2) последовательности $\mathscr{L}_r$.

Интуитивно ясно, что последовательное построение задач $\mathscr{L}_r$, $r=1, 2, \ldots$, дает в некотором смысле аппроксимацию множества $X^{ц}$ с помощью множеств X_r.

Способы построения последовательности $\{\mathscr{L}_r\}$, обеспечивающие конечность процесса решения задачи (7.19)—(7.21), были впервые предложены Гомори. В следующем параграфе излагается так называемый первый алгоритм Гомори, содержащий в себе все основные идеи методов отсечения.

§ 7. Первый алгоритм Гомори для целочисленных задач линейного программирования

1. Введем понятие правильного отсечения, которое лежит в основе многих численных методов решения целочисленных задач линейного программирования.

Определение 7.6. Пусть x^* — оптимальный план задачи (7.19), (7.20), не являющийся целочисленным. Неравенство

$$\sum_{j=1}^{n}\gamma_j x_j\leqslant\gamma_0,$$

или

$$\langle\gamma, x\rangle\leqslant\gamma_0, \tag{7.24}$$

где $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$, называется *правильным отсечением*, если оно удовлетворяет требованиям:

а) для вектора x^* неравенство (7.24) не выполняется, т. е. $\langle \gamma, x^* \rangle > \gamma_0$ (*условие отсечения*);

б) если x — целочисленный план задачи (7.19), (7.20) (т. е. план задачи (7.19)—(7.21)), то x удовлетворяет (7.24) (*условие правильности*).

Понятно, что добавление неравенства (7.24) к условиям (7.19), (7.20) сужает допустимое множество X, сохраняя при этом все его целочисленные точки. Тем самым последовательное применение этого приема дает как бы многоэтапную аппроксимацию многогранника $X^ц$ с помощью линейных ограничений.

В связи с понятием правильного отсечения возникают две проблемы. Первая из них состоит в том, чтобы сформулировать общий алгоритм отсечения для произвольной целочисленной задачи линейного программирования. Вторая проблема заключается в построении правильного отсечения таким образом, чтобы обеспечить решение задачи (7.19)—(7.21) за конечное число шагов, т. е. чтобы от множества X всякий раз отсекались достаточно большие «лишние» участки.

Отметим, что второе требование является довольно тонким. В качестве подтверждения рассмотрим способ построения правильного отсечения, предложенный Данцигом.

Пусть x^* — опорный оптимальный план задачи (7.19), (7.20), σ и ω — списки номеров соответственно базисных и не базисных переменных, отвечающие некоторому базису плана x^*. Тогда $x_j^* = 0$ при $j \in \omega$. С учетом этого свойства нетрудно построить правильное отсечение для плана x^*, если он не является целочисленным: в качестве такого может служить неравенство $\sum\limits_{j \in \omega} x_j \geqslant 1$.

В самом деле, условие отсечения тривиально выполняется, поскольку $\sum\limits_{j \in \omega} x_j^* = 0$. Условие правильности также соблюдено, так как если $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — целочисленный план задачи (7.19), (7.20), то величина $\sum\limits_{j \in \omega} x_j$ с учетом условий $x_j \geqslant 0$, $j \in \omega$, может быть меньше единицы лишь в том случае, когда $x_j = 0$ при всех $j \in \omega$.

Но в таком случае план x — опорный, и в качестве его базиса можно принять базис плана x^*. Как отмечалось (см. (5.7)), опорный план однозначно определяется своим базисом, откуда получаем, что из неравенства $\sum_{j\in\omega} x_j < 1$ вытекает $x = x^*$. Последнее, однако, невозможно, так как x — целочисленный вектор, а x^* таковым не является.

Указанный прием построения правильного отсечения, несмотря на его простоту, оказался малоэффективным, поскольку конечность процесса решения обеспечивается лишь для узкого класса целочисленных задач линейного программирования.

2. Опишем способ построения правильного отсечения, предложенный Гомори. Для произвольного вещественного числа α через $[\alpha]$ будем обозначать его целую часть, т. е. $[\alpha]$ есть наибольшее целое число k, не превосходящее α.

Дробной частью $\{\alpha\}$ числа α называется число $\{\alpha\} = \alpha - [\alpha]$. Отметим очевидное свойство дробной части произвольного вещественного числа: $1 > \{\alpha\} \geqslant 0$, причем $\{\alpha\} = 0$ в том и только том случае, когда α — целое.

Пусть x^* — опорное решение задачи (7.19), (7.20), не являющееся целочисленным, $\{a^{i_1}, a^{i_2}, \ldots, a^{i_m}\}$ — его базис и $\mathfrak{B}$ — соответствующая симплексная таблица в координатной форме.

Рассмотрим приведенную систему уравнений, отвечающую данному базису (и таблице $\mathfrak{B}$) плана x^*:

$$x_0 + \sum_{j\in\omega} \alpha_{0j}x_j = \alpha_{00}, \tag{7.25}$$

$$x_i + \sum_{j\in\omega} \alpha_{ij}x_j = \alpha_{i0}, \qquad i \in \sigma. \tag{7.26}$$

Поскольку $x_j^* = 0$ при $j \in \omega$, то нецелочисленными могут быть лишь величины $x_0^* = \langle c, x^* \rangle$, x_i^*, $i \in \sigma$.

Пусть s — такой индекс $(0 \leqslant s \leqslant n)$, что число x_s^* — не целое. Рассмотрим s-ю строку в симплексной таблице $\mathfrak{B}$ (s-е уравнение в (7.25), (7.26)) и составим выражение

$$z_s(x) = -\{\alpha_{s0}\} + \sum_{j\in\omega} \{\alpha_{sj}\}x_j. \tag{7.27}$$

Теорема 7.7. *Если $x \in X$ — целочисленный план задачи* (7.19), (7.20), *то*

$$z_s(x) \text{ — целое}, \quad z_s(x) \geqslant 0.$$

Доказательство. Используя соотношение $\alpha_{sj} = [\alpha_{sj}] + \{\alpha_{sj}\}$, $j = 0, 1, 2, \ldots, n$, из (7.26) при $i = s$ получаем

$$x_s + \sum_{j\in\omega} ([\alpha_{sj}] + \{\alpha_{sj}\})\, x_j = [\alpha_{s0}] + \{\alpha_{s0}\},$$

откуда

$$x_s - [\alpha_{s0}] + \sum_{j\in\omega} [\alpha_{sj}]\, x_j = \{\alpha_{s0}\} - \sum_{j\in\omega} \{\alpha_{sj}\}\, x_j.$$

В левой части данного равенства стоит целое число, следовательно, число

$$-z_s(x) = \{\alpha_{s0}\} - \sum_{j\in\omega} \{\alpha_{sj}\}\, x_j$$

также целое. Из того, что $x_j \geqslant 0$, $j \in \omega$, используя свойство дробной части, получаем

$$\{\alpha_{s0}\} - \sum_{j\in\omega} \{\alpha_{sj}\}\, x_j < 1,$$

т. е. $-z_s(x) < 1$, или $z_s(x) > -1$. Учитывая, что $z_s(x)$ — целое, окончательно имеем $z_s(x) \geqslant 0$.

Следствие. *Если $x_s^* (= \alpha_{s0})$ — нецелое число и множество $\tilde{X}$ планов целочисленной задачи (7.19)—(7.21) непусто, то среди чисел $\{\alpha_{sj}\}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, есть положительные.*

В самом деле, все числа $\{\alpha_{sj}\}$, очевидно неотрицательны. Допустим, что $\{\alpha_{sj}\} = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Если $\tilde{X}$ непусто и $\tilde{x} \in \tilde{X}$, то $z_s(\tilde{x}) = -\{\alpha_{s0}\}$, что противоречит утверждению теоремы о том, что $z_s(\tilde{x})$ — целое число, так как $0 < \{\alpha_{s0}\} < 1$.

Замечание. В доказательстве теоремы 7.7 мы воспользовались предположением II (п. 1, § 6) о том, что гарантирована целочисленность целевой функции. Действительно, в случае $s = 0$ величина

$$x_0 - [\alpha_{00}] + \sum_{j\in\omega} [\alpha_{0j}]\, x_j$$

является целой (при условии, что $x \in \tilde{X}$) лишь тогда, когда число $x_0 = \langle c, x\rangle$ — целое.

Отсюда вытекает

Теорема 7.8. *Если число x_s^* — нецелое, то неравенство*

$$\sum_{j\in\omega} \{\alpha_{sj}\}\, x_j \geqslant \{\alpha_{s0}\} \tag{7.28}$$

является правильным отсечением.

Доказательство. Проверим условие отсечения в определении 7.6. Так как $x_s^* = \alpha_{s0}$, то из того, что x_s^* — нецелое, получаем неравенство $\{\alpha_{s0}\} > 0$. Поскольку $x_j^* = 0$ при $j \in \omega$, то $\sum_{j\in\omega} \{\alpha_{sj}\} x_j^* = 0$, и поэтому вектор x^* не удовлетворяет неравенству (7.28). Условие правильности следует из утверждения $z_s(x) \geqslant 0$ в теореме 7.7.

3. Перейдем к изложению первого алгоритма Гомори.

Обозначим задачу (7.19), (7.20) через $\mathscr{L}_0$. Гомори предложил на первом этапе своего алгоритма находить лексикографический максимум задачи $\mathscr{L}_0$ (см. § 6, гл. VI). Будем обозначать через

$$x(0) = (x_0(0),\ x_1(0),\ \ldots,\ x_n(0))$$

$(n+1)$-мерный вектор такой, что $(x_1(0), \ldots, x_n(0))$ — решение лексикографической задачи $\mathscr{L}_0$, а $x_0(0) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j(0)$ — значение линейной формы. В тех случаях, когда это не вызовет недоразумения, будем называть $x(0)$ оптимальным планом лексикографической задачи $\mathscr{L}_0$ (хотя по принятой нами ранее терминологии планом называется вектор, составленный из последних n координат вектора $x(0)$).

Согласно теореме 6.8 $x(0)$ — опорный план; по теореме 6.10 он же является строго допустимым псевдопланом задачи $\mathscr{L}_0$.

Если $x(0)$ — целочисленный вектор, то он, очевидно, и является решением задачи (7.19)—(7.21).

В противном случае отыскивается *минимальный* индекс s, $0 \leqslant s \leqslant n$, для которого величина $x_s(0)$ не является целой. Пусть $\mathfrak{B}(0)$ — симплексная таблица в координатной форме, соответствующая вектору $x(0)$. С помощью коэффициентов s-й строки этой таблицы (т. е. коэффициентов приведенной системы (7.25), (7.26)) приемом, описанным в п. 2, строится правильное отсечение.

Вводится вспомогательная переменная x_{n+1} и рассматривается новая задача $\mathscr{L}_1$:

$$\max \langle c, x \rangle$$

$$Ax = b, \tag{7.29}$$

$$\sum_{j\in\omega} \{\alpha_{sj}\} x_j - x_{n+1} = \{\alpha_{s0}\} \tag{7.30}$$

$$x \geqslant 0, \quad x_{n+1} \geqslant 0. \tag{7.31}$$

Следующий этап состоит в нахождении лексикографического максимума задачи $\mathscr{L}_1$. Важным достоинством алгоритма Гомори является тот факт, что начальный строго допустимый псевдоплан для применения двойственного симплекс-метода к задаче $\mathscr{L}_1$ находится без труда. Действительно, легко видеть, что в качестве такого псевдоплана можно взять вектор

$$y(1) = (x_0(0),\ x_1(0),\ \ldots,\ x_p(0),\ x_{n+1}(0)),$$

где

$$x_{n+1}(0) = \sum_{j\in\omega} \{\alpha_{sj}\}\, x_j(0) - \{\alpha_{s0}\} = -\{\alpha_{s0}\}.$$

В самом деле, очевидно, что $y(1)$ удовлетворяет (вместе с вектором $x(0)$) ограничениям (7.29), (7.30) задачи $\mathscr{L}_1$, а из ограничений (7.31) нарушается лишь одно: $x_{n+1}(0) = -\{\alpha_{s0}\} < 0$. Кроме того, вектор $y(1)$ является опорным для системы уравнений (7.29), (7.30), поскольку если $\{a^{i_1}, a^{i_2}, \ldots, a^{i_m}\}$ — базис плана $x(0)$, то система

$$\left\{\begin{pmatrix} a^{i_1} \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a^{i_2} \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a^{i_m} \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$

линейно независима и служит базисом для $y(1)$. Покажем, что $y(1)$ — строго допустимый псевдоплан. С этой целью построим симплексную таблицу, соответствующую указанному базису вектора $y(1)$. Как следует из § 2 гл. VI, для этого нужно лишь приписать снизу к таблице $\mathfrak{B}(0)$ строку

$$(-\{\alpha_{s0}\},\ -\{\alpha_{sj_1}\}, \ldots,\ -\{\alpha_{sj_{n-m}}\}),$$

где $\omega = \{j_1, j_2, \ldots, j_{n-m}\}$ — список номеров небазисных переменных, соответствующий таблице $\mathfrak{B}(0)$ опорного плана $x(0)$. Поскольку $x(0)$ — строго допустимый псевдоплан, то всякий столбец β^j, $j \in \omega$, таблицы $\mathfrak{B}(0)$ лексикографически положителен: $\beta^j \succ 0$, $j \in \omega$. Отсюда вытекает, что и в симплексной таблице в координатной форме, отвечающей опорному вектору $y(1)$, всякий столбец (кроме первого, совпадающего с $y(1)$) лексикографически положителен:

$$\begin{pmatrix} \beta^j \\ -\{\alpha_{sj}\} \end{pmatrix} \succ 0, \qquad j \in \omega.$$

Таким образом, имея в своем распоряжении решение $x(0)$ лексикографической задачи $\mathscr{L}_0$ и соответствующую симплекс-таблицу в координатной форме $\mathfrak{B}(0)$, без каких-либо дополнительных вычислений находим начальный строго допустимый псевдоплан $y(1)$ для задачи $\mathscr{L}_1$ и строим соответствующую ему симплексную таблицу в координатной форме.

Может случиться, что лексикографическая задача $\mathscr{L}_1$ не имеет решения. В этом случае решение целочисленной задачи (7.19)—(7.21) следует прекратить, поскольку имеет место

Теорема 7.9. *Если в задаче $\mathscr{L}_1$ не существует лексикографического максимума, то множество $\tilde{X}$ целочисленных точек задачи* (7.19)—(7.21) *пусто.*

Доказательство. Поскольку множество X векторов, удовлетворяющих условиям $Ax = b$, $x \geqslant 0$, согласно предположению I (п. 1 § 6) ограничено, то ограниченным является и множество планов задачи $\mathscr{L}_1$. Поэтому единственной причиной, по которой эта задача может не иметь лексикографического максимума, может быть только то, что множество ее планов пусто. Покажем, что в таком случае множество $\tilde{X}$ также пусто.

Предположим противное, т. е. что $\tilde{X} \neq \varnothing$, и пусть $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n) \in \tilde{X}$. По теореме 7.7 получаем, что величина

$$\tilde{x}_{n+1} = -\{\alpha_{\cdot 0}\} + \sum_{j \in \omega} \{\alpha_{sj}\} \tilde{x}_j$$

неотрицательна. Но это означает, что вектор $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots$ $\ldots, \tilde{x}_n, \tilde{x}_{n+1})$ является планом задачи $\mathscr{L}_1$, в противоречие с вышесказанным. Теорема доказана.

Пусть $x(1) = (x_0(1), x_1(1), \ldots, x_n(1), x_{n+1}(1))$ — решение лексикографической задачи $\mathscr{L}_1$. Отправляясь от задачи $\mathscr{L}_1$ и вектора $x(1)$, аналогичным образом строятся задачи $\mathscr{L}_r$, $r = 2, 3, \ldots$, и решения $x(r) \in \mathrm{R}^{n+1+r}$ соответствующих им лексикографических задач.

Заметим, что алгоритм Гомори однозначно определяет последовательность $x(r)$, $r = 0, 1, 2, \ldots$, что следует из теоремы 6.7 и однозначности выбора индекса s. Обратим также внимание на то, что индекс s всегда не превосходит n: $0 \leqslant s \leqslant n$. В самом деле, если все $x_j(r)$ при $j = 0, 1, 2, \ldots, n$ — целые, то из теоремы 7.7 вытекает, что $x_{n+1}(r)$, $x_{n+2}(r), \ldots$ — также целые.

Если на каком-то шаге r вектор

$$x(r) = (x_0(r), x_1(r), \ldots, x_n(r), \ldots, x_{n+r}(r))$$

оказывается целочисленным, то вектор $(x_0(r), x_1(r), \ldots$ $\ldots, x_n(r))$ является решением задачи (7.19)—(7.21). Доказательство этого очевидного утверждения оставляем читателю.

Переход от вектора $x(r)$ к вектору $x(r+1)$ с помощью описанного алгоритма Гомори называется *большой итерацией*, в отличие от промежуточных итераций двойственного симплекс-метода, которые называются *малыми*.

Основной вопрос, относящийся к первому алгоритму Гомори, таков: всегда ли за конечное число больших итераций можно получить целочисленный вектор $x(r)$?

Ответ на него дается в следующем пункте.

4. Докажем конечность первого алгоритма Гомори. В данном пункте будем пользоваться следующими обозначениями:

$x(0)=(x_0(0), x_1(0), \ldots, x_n(0))$, где $(x_1(0), \ldots x_n(0))$ — решение лексикографической задачи $\mathscr{L}_0$, $x_0(0)= = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j(0)$ — соответствующее значение линейной формы;

$y(1)=(x_0(0), x_1(0), \ldots, x_n(0), x_{n+1})$, где

$$x_{n+1}=\sum_{j\in\omega}\{\alpha_{sj}\}x_j(0),$$

вектор $y(1)$ служит начальным строго допустимым псевдопланом при решении задачи $\mathscr{L}_1$ двойственным симплекс-методом в координатной форме;

$\bar y(1)=(\bar y_0(1), \bar y_1(1), \ldots, \bar y_n(1), \bar y_{n+1}(1))$ — вектор, получающийся из $y(1)$ в результате первой (малой) итерации двойственного симплекс метода в координатной форме.

Аналогично вводятся обозначения $x(r)$, $y(r+1)$, $\bar y(r+1)$, $r=1, 2, \ldots$

Из свойств двойственного симплекс-метода в координатной форме (теорема 6.6) следует

$$y(r)\succ\bar y(r)\succcurlyeq x(r). \tag{7.32}$$

Лемма 7.8. *Пусть s — минимальный индекс, для которого число $x_s(0)$ — не целое. Тогда*

$$(x_0(0), x_1(0), \ldots, x_{s-1}(0), [x_s(0)])\succcurlyeq$$
$$\succcurlyeq(\bar y_0(1), \bar y_1(1), \ldots, \bar y_{s-1}(1), \bar y_s(1)).$$

Доказательство. Поскольку $y(1)\succ\bar y(1)$ (см. (7.32)), то возможны два случая:

1. $(x_0(0), x_1(0), \ldots, x_{s-1}(0)) \succ (\bar{y}_0(1), \bar{y}_1(1), \ldots, \bar{y}_{s-1}(1))$.

2. $(x_0(0), x_1(0), \ldots, x_{s-1}(0)) = (\bar{y}_0(1), \bar{y}_1(1), \ldots, \bar{y}_{s-1}(1))$.

В случае 1 утверждение леммы выполняется тривиально по определению лексикографического порядка.

Рассмотрим случай 2. Согласно правилу 1* двойственного симплекс-метода на первой (малой) итерации решения задачи $\mathscr{L}_1$ выводу из числа базисных подлежит переменная x_{n+1}, поскольку в векторе $y(1)$ $x_j(0) \geqslant 0$, $j \in \omega$, $x_{n+1} < 0$. Пусть $k \in \omega$ — такой индекс, что

$$-\{\alpha_{sk}\} < 0, \tag{7.33}$$

$$\begin{pmatrix} \beta^k \\ -\{\alpha_{sk}\} \end{pmatrix} \prec \begin{pmatrix} \beta^j \\ -\{\alpha_{sj}\} \end{pmatrix}$$

для любого $j \in \omega$, если $-\{\alpha_{sj}\} < 0$. По правилу 2*' в число базисных вводится переменная x_k.

Согласно формуле (6.29), случай 2 возможен лишь при условии $\beta_{ik} = 0$, $i = 0, 1, 2, \ldots, s-1$. Поскольку $x(0)$ — строго допустимый псевдоплан задачи $\mathscr{L}_0$, то все столбцы β^j, $j \in \omega$, симплекс-таблицы $\mathfrak{B}(0)$ лексикографически положительны; в частности, $\beta^k \succ 0$. Следовательно, координата β_{sk} данного столбца должна быть неотрицательной. Заметим, что $\beta_{sk} = \alpha_{sk}$ (т. е. $0 \leqslant s \leqslant n$ и $s \in \omega$, в силу формул § 3 гл. VI). По условию (7.33) число α_{sk} — не нуль. Поэтому $\alpha_{sk} > 0$ и

$$\alpha_{sk} \geqslant \{\alpha_{sk}\}. \tag{7.34}$$

По формуле (6.29) преобразования симплекс-таблицы имеем

$$\bar{y}_s(1) = x_s(0) - \frac{\{\alpha_{s0}\}}{\{\alpha_{sk}\}}\alpha_{sk}.$$

Вспоминая, что $x_s(0) = \alpha_{s0}$, получаем с учетом (7.34)

$$\bar{y}_s(1) = \alpha_{s0} - \frac{\{\alpha_{s0}\}}{\{\alpha_{sk}\}}\alpha_{sk} \leqslant \alpha_{s0} - \frac{\{\alpha_{s0}\}}{\{\alpha_{sk}\}}\{\alpha_{sk}\} =$$

$$= \alpha_{s0} - \{\alpha_{s0}\} = [\alpha_{s0}] = [x_s(0)].$$

Лемма доказана.

Замечание. Если исходная задача (7.19)—(7.21) допустима, то согласно следствию из теоремы 7.7 индекс k, удовлетворяющий условию (7.33), существует.

Следствие. Справедливо соотношение

$$(x_0(0), x_1(0), \ldots, x_{s-1}(0), [x_s(0)]) \succcurlyeq$$

$$\succcurlyeq (x_0(r), x_1(r), \ldots, x_{s-1}(r), x_s(r)).$$

Действительно, при $r=1$ это неравенство вытекает из леммы и второго неравенства в (7.32). Чтобы получить это утверждение при произвольном r, нужно воспользоваться тем, что $y_j(r)=x_j(r)$ при $0\leqslant j\leqslant n$, и неравенством $y(r)\geqslant x(r)$ в (7.32).

Теорема 7.10. *Если выполнены предположения* I *и* II *п.* 1, § 6, *то первый алгоритм Гомори требует лишь конечного числа больших итераций.*

Чтобы убедиться в истинности теоремы, необходимо показать, что при некотором r вектор $x(r)=(x_0(r), x_1(r), \ldots$ $\ldots, x_{n+r}(r))$ — целочисленный. Для этого, в свою очередь, достаточно доказать целочисленность вектора $(x_0(r),$ $x_1(r), \ldots, x_n(r))$, поскольку из теоремы 7.7 тогда вытекает, что все числа $x_{n+1}(r), x_{n+2}(r), \ldots, x_{n+r}(r)$ также целые. Напомним, что минимальный индекс s, при котором число $x_s(r)$ — нецелое, всегда не превосходит n: $0\leqslant s\leqslant n$. Для доказательства теоремы используется

Лемма 7.9. *Для любого j, $0\leqslant j\leqslant n$, существует такой номер R_j, что при $r\geqslant R_j$ все числа $x_j(r)$ — целые и равны одному и тому же целому числу $x_j(R_j)$.*

Доказательство. Пусть s, $0\leqslant s\leqslant n$, — минимальный индекс, для которого утверждение леммы не выполняется. Обозначим $R=\max\limits_{0<j<s-1} R_j$. В том случае, когда $s=0$, положим $R=0$.

Пусть r, l — такие индексы, что $R\leqslant r<l$, и числа $x_s(r)$, $x_s(l)$ — нецелые. Покажем, что тогда $[x_s(r)]>[x_s(l)]$. Действительно, по определению s имеем

$$\left.\begin{aligned} &x_j(r) \text{ — целое},\\ &x_j(r)=x_j(r+q), \quad q=1, 2, \ldots\end{aligned}\right\} \text{ при } 0\leqslant j\leqslant s-1. \tag{7.35}$$

В таком случае s — минимальный индекс, для которого число $x_s(r)$ — нецелое. По следствию из леммы 7.8 имеем $[x_s(r)]\geqslant x_s(l)$.

Учитывая, что $x_s(l)$ — не целое число, имеем $x_s(l)>$ $>[x_s(l)]$, откуда и получаем нужное утверждение. Поскольку множество X планов задачи (7.19)—(7.21) ограничено, то ограничена любая величина $x_s(r)$, $0\leqslant s\leqslant n$, $r=1, 2, \ldots$. Поэтому бесконечной цепочки неравенств вида $[x_s(r)]>[x_s(l)]>\ldots$ существовать не может, а, следовательно, в последовательности $x_s(r)$, $r=0, 1, \ldots$, не может быть бесконечно много нецелых чисел. Аналогично доказывается, что в этой последовательности не может быть и бесконечно много различных целых чисел.

Вернемся к теореме 7.10. Пусть $R = \max\limits_{0 \leqslant j \leqslant n} R_j$, где числа R_j фигурируют в формулировке предыдущей леммы. Тогда согласно этой лемме все числа $x_j(R)$, $0 \leqslant j \leqslant n$, — целые. Из теоремы 7.7 получаем, что вектор $x(R)$ — целочисленный. Следовательно, алгоритм Гомори требует не более R больших итераций.

5. При практической реализации первого алгоритма Гомори важной проблемой является нарастание количества ограничений, что ведет к увеличению размеров симплексных таблиц. Гомори предложил способ устранения этого недостатка алгоритма, заключающийся в следующем.

1) В ходе решения задачи $\mathscr{L}_r$ двойственным симплекс-методом на каждой малой итерации следует пользоваться уточнением правила 1*: если в первом столбце симплекс-таблицы имеется несколько отрицательных элементов $\beta_{i0}(=x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n, \ldots, n+r$, то выводить из числа базисных нужно переменную с минимальным номером.

2) Если в ходе очередной малой итерации при реализации задачи $\mathscr{L}_r$ все основные переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ оказались неотрицательными, то дальнейшее применение двойственного симплекс-метода к задаче $\mathscr{L}_r$ следует прекратить, несмотря на то, что ее лексикографический максимум, быть может, еще не достигнут. Если при этом все переменные x_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, оказались целочисленными, то по теореме 7.7 все вспомогательные переменные x_{n+k}, $k = 1, 2, \ldots, r$, целочисленны и неотрицательны. Это означает, как уже известно, что вектор $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является решением исходной целочисленной задачи. В противном случае переходим к новой большой итерации.

3) Строка симплексной таблицы, соответствующая вспомогательной переменной x_{n+r}, удаляется, как только переменная x_{n+r} объявляется небазисной. Напомним, что это происходит на первой же малой итерации решения задачи $\mathscr{L}_r$.

4) Если в ходе решения задачи $\mathscr{L}_r$ переменная x_{n+r} вновь попадает в число базисных, то соответствующая ей строка не восстанавливается.

Понятно, что при выполнении правил 3), 4) размеры симплексных таблиц в первом алгоритме Гомори не увеличиваются — в каждой таблице содержится $n+2$ строк (отвечающие основным переменным $x_0, x_1, \ldots, x_n$ и текущей вспомогательной переменной x_{n+r} в момент ее введения) и $n-m+1$ столбцов (поскольку число $n-m$ небазисных переменных не меняется).

5) На первой малой итерации решения задачи $\mathscr{L}_{r+1}$ в качестве переменной, выводимой из базиса, выбирается именно x_{n+r+1}, несмотря на то, что значения остальных вспомогательных переменных в этот момент также могут быть отрицательными.

Заметим, что правило 5) на самом деле лишнее, поскольку при выполнении правил 3) и 4) мы ничего не знаем о значении остальных переменных $x_{n+1}, \ldots, x_{n+r}$ в момент перехода к задаче $\mathscr{L}_{r+1}$. Данное правило выделено лишь для того, чтобы подчеркнуть отличие рассматриваемых алгоритмов.

Отметим, что при использовании правила 2) возникающая последовательность $x'(r)$, $r=0, 1, 2, \ldots$, вообще говоря, отличается от той, которая возникает в ходе алгоритма Гомори, как он описан в п. 3. Именно, каждый из векторов $x'(r)$ может не быть лексикографическим максимумом задачи $\mathscr{L}_r$, поскольку значения некоторых из вспомогательных переменных могут быть отрицательными.

Тем не менее, для последовательности $x'(r)$, $r=0, 1, 2, \ldots$, получаемой с использованием правил 1) и 2), сохраняется важное свойство: эта последовательность единственна.

Осталось лишь доказать, что при выполнении правил 1)—4) алгоритм Гомори остается конечным, поскольку его конечность и будет означать, что он приводит к цели — нахождению целочисленного решения задачи (7.19)—(7.21). В самом деле, конечность числа R больших итераций означает, что вектор $x'(R)$ — целочисленный.

Отметим, во-первых, что при использовании правила 2) число малых итераций решения задачи $\mathscr{L}_r$ конечно — не больше, чем требуется для нахождения ее лексикографического максимума.

Теорема 7.11. *Последовательность $x'(r)$, возникающая в процессе применения алгоритма Гомори, уточненного правилами 1)—4), конечна.*

Доказательство. Заметим, что в доказательстве теоремы 7.10 о конечности последовательности $x(r)$ использовались лишь два обстоятельства, регулирующие возникновение этой последовательности: способ построения правильного отсечения и тот факт, что во всякой текущей симплекс-таблице все столбцы β^j, $j \in \omega$, лексикографически положительны. Таким образом, удаление строки, соответствующей вспомогательной переменной, может повлиять лишь на последнее обстоятельство. Этого, однако, также быть не может, как показывает

Лемма 7.10. *В любой симплекс-таблице, возникающей в ходе алгоритма Гомори, как он описан в п.* 3, *для любого столбца*

$$\beta^j = (\beta_{0j}, \beta_{1j}, \ldots, \beta_{nj}, \beta_{n+1j}, \ldots, \beta_{n+rj}), \quad j \in \omega,$$

имеет место неравенство

$$(\beta_{0j}, \beta_{1j}, \ldots, \beta_{nj}) \succ 0.$$

Доказательство. Допустим, что утверждение леммы не выполняется для некоторого $k \in \omega$. Поскольку $\beta^k \succ 0$, то данное предположение означает, что

$$\beta_{ik} = 0, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n. \tag{7.36}$$

По определению симплексной таблицы в координатной форме и согласно формуле (6.21), имеем

$$x - x^0 = -\sum_{j \in \omega} \beta^j x_j \tag{7.37}$$

для любого $x \in \mathbf{R}^{n+1+r}$, если утверждение леммы нарушается в ходе решения задачи $\mathscr{L}_r$. Формула (7.37) с учетом (7.36) означает, что изменение значения переменной x_k не влияет на значения x_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Другими словами, при одном и том же наборе величин x_i, $0 \leqslant i \leqslant n$, переменная x_k может принимать произвольное значение. Отсюда следует, во-первых, что $k \geqslant n+1$, а во-вторых, что принятое допущение (7.36) неверно, поскольку значение любой вспомогательной переменной x_k, $k \geqslant n+1$, как вытекает из (7.30), однозначно определяется значениями основных переменных.

Поскольку удаление строк, соответствующих вспомогательным переменным, не влияет на свойство столбцов β^j, $j \in \omega$, быть лексикографически положительными, то эти строки вообще не нужны. Действительно, с учетом правил 1) и 2) переменная x_{n+r}, попав в число базисных, так и остается базисной до конца вычислений, и ее строка не потребуется для определения переменной, вводимой в базис согласно правилу 2^{*l}.

Таким образом, элементы строки, соответствующие переменной x_{n+r}, не участвуют в формулах (6.29) двойственного симплекс-метода для вычисления значений всех остальных переменных.

Поскольку, как отмечалось, индекс s, регулирующий формирование правильного отсечения, не превосходит n, $0 \leqslant s \leqslant n$, то и для этих целей вспомогательные переменные не потребуются.

6. Рассмотрим числовой пример решения целочисленной задачи линейного программирования.

В качестве объекта моделирования возьмем так называемое решето Эратосфена — процесс поиска натуральных простых чисел.

Пусть уже найдены простые числа $p_1, p_2, \ldots, p_m$ и нужно отыскать следующее простое число p_{m+1}. Запишем эту проблему в виде задачи линейного программирования. Обозначим искомое число через x и рассмотрим задачу

$$\max(-x)$$

$$x = k_i p_i + r_i, \quad 1 \leqslant r_i \leqslant p_{i-1}, \quad x \geqslant p_m,$$

$$x, k_i, r_i \text{ — натуральные числа}, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Ограничения этой задачи означают, что натуральное число x взаимно просто со всеми простыми числами p_1, $p_2, \ldots, p_m$ и отлично от 1. Понятно, что минимальное натуральное число, обладающее такими свойствами, совпадает с p_{m+1}.

Вычисления будем производить для случая, когда заданы простые числа $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$ и нужно найти число $p_4 = 7$.

Таким образом, имеем следующую целочисленную задачу линейного программирования:

$$\max(-x)$$

$$x = 2k_1 + 1, \quad x = 3k_2 + r_2, \quad 1 \leqslant r_2 \leqslant 2,$$

$$x = 5k_3 + r_3, \quad 1 \leqslant r_3 \leqslant 4, \quad x \geqslant 5,$$

$$x, k_1, k_2, r_2, k_3, r_3 \text{ — натуральные числа.}$$

С тем чтобы привести задачу к канонической форме, введем дополнительные переменные:

$$\max(-x)$$

$$x = 2k_1 + 1, \quad x = 3k_2 + r_2, \quad x = 5k_3 + r_3,$$

$$r_2 - v_2 = 1, \quad r_2 + w_2 = 2, \quad r_3 - v_3 = 1,$$

$$r_3 + w_3 = 4, \quad x - v_4 = 5.$$

		v_2	v_3	v_4			y_1	v_3	v_4		y_1	y_2	v_4			y_1	y_2	w_3		y_1	y_2	y_3
x_0	-5	0	0	1		-5	0	0	1	-5	0	0	1		$-\frac{21}{4}$	0	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	-6	0	1	1
x	5	0	0	-1		5	0	0	-1	5	0	0	-1		$\frac{21}{4}$	0	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{4}$	6	0	-1	-1
k_1	2	0	0	$-\frac{1}{2}$		2	0	0	$-\frac{1}{2}$	2	0	0	$-\frac{1}{2}$		$\frac{17}{8}$	0	$-\frac{5}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
k_2	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$		1	1	0	-1	1	1	0	-1		$\frac{5}{4}$	1	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{4}$	2	1	-1	-1
r_2	1	-1	0	0		2	-3	0	2	2	-3	0	2		$\frac{3}{2}$	-3	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-3	2	2
k_3	$\frac{4}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$		$\frac{4}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	0	1	-1		$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	1	0	0	-1
r_3	1	0	-1	0		1	0	-1	0	5	0	-5	4		4	0	0	1	1	0	-1	4
v_2	0	-1	0	0		1	-3	0	2	1	-3	0	2		$\frac{1}{2}$	-3	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	-3^*	2	2
w_2	1	1	0	0		0	3	0	-2	0	3	0	-2		$\frac{1}{2}$	3	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	2	3	-2	-2
v_3	0	0	-1	0		0	0	-1	0	4	0	-5	4		3	0	0	1	0	0	-1	4
w_3	3	0	1	0		3	0	1	0	-1	0	5	-4^*		0	0	0	-1	3	0	1	-4
v_4	0	0	0	-1		0	0	0	-1	0	0	0	-1		$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{4}$	1	0	-1	-1
y_1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1^*}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	y_2	$-\frac{4}{5}$	0	$-\frac{1^*}{5}$	$-\frac{4}{5}$					y_3	$-\frac{3}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1^*}{4}$				

		v_2	y_2	y_3		v_2	y_2	y_4		v_2	r_3	y_4			v_2	v_3	y_4		v_2	y_5	y_4
x_0	—6	0	1	1	—7	0	0	2	—7	0	0	2		—7	0	0	2	—7	0	0	2
x	6	0	—1	—1	7	0	0	—2	7	0	0	—2		7	0	0	—2	7	0	0	—2
k_1	$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	3	0	0	—1	3	0	0	—1		3	0	0	—1	3	0	0	—1
k_2	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	2	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$		2	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{2}{3}$
r_2	1	—1	0	0	1	—1	0	0	1	—1	0	0		1	0	0	0	1	—1	0	0
k_3	1	0	0	—1	2	0	1	—2	$\frac{7}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$		$\frac{6}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	1	0	1	—1
r_3	1	0	—1	4	—3	0	—5*	8	0	0	—1	0		1	0	—1	0	2	0	—5	3
v_2	0	—1	0	0	0	—1	0	0	0	—1	0	0		0	—1	0	0	0	—1	0	0
w_2	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0		1	1	0	0	1	1	0	0
v_3	0	0	—1	4	—4	0	—5	8	—1	0	—1*	0		0	0	—1	0	1	0	—5	3
w_3	3	0	1	—4	7	0	5	—8	4	0	1	0		3	0	1	0	2	0	5	—3
v_4	1	0	—1	—1	2	0	0	—2	2	0	0	—2		2	0	0	—2	2	0	0	—2
y_4	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1^*}{2}$									y_5	$-\frac{1}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}$				

Вектор переменных $(x, k_1, k_2, r_2, k_3, r_3, v_2, w_2, v_3, w_3, v_4)$ предполагается целочисленным и неотрицательным.

Нетрудно найти лексикографический максимум данной задачи без условия целочисленности: (5, 2, 4/3, 1, 4/5, 1, 0, 1, 0, 3, 0). Небазисными являются переменные v_2, v_3, v_4.

Для получения соответствующей симплексной таблицы в координатной форме нужно выразить все переменные через небазисные:

$$x = 5 + v_4,$$

$$k_1 = 2 + \frac{1}{2} v_4, \quad k_2 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} v_2 + \frac{1}{3} v_4, \quad r_2 = 1 + v_2,$$

$$k_3 = \frac{4}{5} - \frac{1}{5} v_3 + \frac{1}{5} v_4, \quad r_3 = 1 + v_3,$$

$$w_2 = 1 - v_2, \quad w_3 = 3 - v_3.$$

Введем переменную x_0, соответствующую целевой функции $(x_0 = -x)$, $x_0 = -5 - v_4$. Вспомогательные переменные Гомори будем обозначать y_1, y_2, ... Результаты расчетов приведены в таблицах (с. 262, 263).

Решение: $x = 7$, $k_1 = 3$, $k_2 = 2$, $r_2 = 1$, $k_3 = 1$, $r_3 = 2$, $v_2 = 0$, $w_2 = 1$, $v_3 = 1$, $w_3 = 2$, $v_4 = 0$.

7. В первом алгоритме Гомори предполагается целочисленность всех переменных. В то же время имеется достаточно много практических задач, в которых целочисленными являются лишь некоторые из переменных. Кроме того, недостатком первого алгоритма Гомори является чувствительность к ошибкам вычислений при подсчете дробных частей, при округлении чисел и т. д. Разработаны различные варианты целочисленных алгоритмов, устраняющих указанные недостатки. Познакомиться с некоторыми из таких алгоритмов читатель может в [24].

§ 8. Блочное программирование

1. Рассмотрим класс задач линейного программирования, в которых множество всех ограничений имеет следующую специальную структуру. Все переменные $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можно так разбить на несколько групп:

$$x^1 = (x_1, x_2, \ldots, x_{r_1}),$$

$$x^2 = (x_{r_1+1}, x_{r_1+2}, \ldots, x_{r_2}),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x^k = (x_{r_{k-1}+1}, x_{r_{k-1}+2}, \ldots, x_{r_k}),$$

где $r_k = n$, что помимо ограничений общего вида $Ax \leqslant b$ имеются ограничения, в которых участвуют лишь переменные одной из групп: $A_h x^h \leqslant b^h$, $h = 1, 2, \ldots, k$.

Именно такую структуру ограничений имеет, например, задача

$$\max (2x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 + x_5 + 2x_6)$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 - x_6 \leqslant 18,$$

$$3x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 + x_5 + 2x_6 \leqslant 15,$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 \leqslant 5, \quad x_1 - x_2 + 2x_3 \leqslant 1,$$

$$-x_4 + x_5 + 3x_6 \leqslant 8, \quad x_4 - 2x_5 + x_6 \leqslant 7,$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = \overline{1, 6}.$$

Группу ограничений, в которых участвуют все переменные, называют *блоком-связкой*. В схематической форме ограничения задачи с блочной структурой имеют вид,

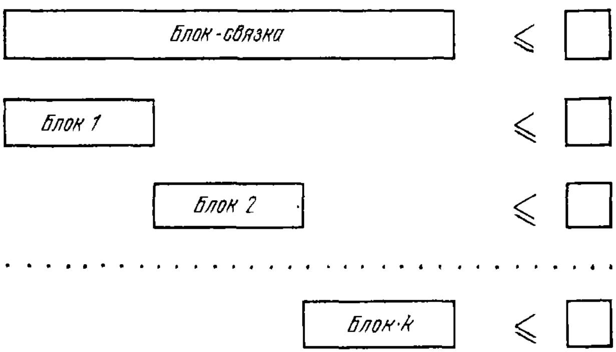

Рис. 7.6.

как на рис. 7.6. Не будь блока-связки, задача линейного программирования с блочной структурой очевидным образом распадалась бы на k самостоятельных задач меньшей размерности. Однако и при наличии связующего блока имеется возможность использовать особенности такой задачи и свести ее решение к решению нескольких задач линейного программирования, размерность которых совпадает с размерностью блоков.

2. Опишем метод декомпозиции Данцига — Вулфа. Обозначим через $\tilde{A}$ блочно-диагональную матрицу

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \ldots 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \ddots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 & A_k \end{pmatrix},$$

через $\tilde{b}$ — соответствующий вектор правой части ограничений $\tilde{b} = (b^1, b^2, \ldots, b^k)$.

Рассмотрим стандартную задачу линейного программирования:

$$\max \langle c, x \rangle$$
$$Ax \leqslant b, \quad \tilde{A}x \leqslant \tilde{b}, \quad x \geqslant 0. \tag{7.38}$$

Считаем, что матрица A имеет размеры $m \times n$ и $b \in \mathbb{R}^m$.

Как обычно, обозначим через X допустимое множество задачи (7.38):

$$X = \{x \mid Ax \leqslant b, \quad \tilde{A}x \leqslant b; \quad x \geqslant 0\}.$$

Будем рассматривать также множества

$$X_A = \{x \mid Ax \leqslant b\}, \quad X_{\tilde{A}} = \{x \mid \tilde{A}x \leqslant \tilde{b}, \ x \geqslant 0\}.$$

Понятно, что $X = X_A \cap X_{\tilde{A}}$.

Для простоты будем рассматривать лишь тот случай, когда множество $X_{\tilde{A}}$ ограничено, т. е. является выпуклым многогранником. Ясно, что это предположение выполняется тогда и только тогда, когда каждая система неравенств $A_h x^h \leqslant b^h$, $x^h \geqslant 0$, $h = 1, 2, \ldots, k$, определяет ограниченное множество.

Пусть $s^1, s^2, \ldots, s^N$ — все крайние точки многогранника $X_{\tilde{A}}$. Согласно теореме 2.13 многогранник $X_{\tilde{A}}$ совпадает с выпуклой оболочкой множества своих крайних точек:

$$X_{\tilde{A}} = \left\{x \mid x = \sum_{j=1}^{N} y_j s^j, \ \sum_{j=1}^{N} y_j = 1, \quad y_j \geqslant 0, \ j = 1, 2, \ldots, N\right\}.$$

Поскольку $X = X_A \cap X_{\tilde{A}}$, то точка $x = \sum\limits_{j=1}^{N} y_j s^j$ принадлежит множеству X в том и только том случае, когда $\sum\limits_{j=1}^{n} y_j = 1$, $y_j \geqslant 0$, $j = 1, 2, \ldots, N$, и для x выполняются ограничения, определяющие X_A:

$$Ax = \sum_{j=1}^{N} y_j As^j \leqslant b.$$

Значение целевой функции на векторе x также можно выразить через s^j, $j = 1, 2, \ldots, N$: $\langle c, x\rangle = \sum_{j=1}^{N} y_j \langle c, s^j\rangle$.

Обозначим

$$\gamma_j = \langle c, s^j\rangle, \quad j = 1, 2, \ldots, N, \quad \gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_N),$$
$$Q^j = As^j, \quad j = 1, 2, \ldots, N, \quad y = (y_1, y_2, \ldots, y_N).$$

Здесь γ_j — число, Q^j — m-мерный вектор.

Исходная задача (7.38) эквивалентна следующей задаче линейного программирования:

$$\max \langle \gamma, y\rangle \tag{7.39}$$
$$\sum_{j=1}^{N} Q^j y_j \leqslant b, \ \sum_{j=1}^{N} y_j = 1, \ y_j \geqslant 0, \ j = 1, 2, \ldots, N.$$

Каждому решению $y^* = (y_1^*, y_2^*, \ldots, y_N^*)$ задачи (7.39) соответствует решение $x^* = \sum_{j=1}^{N} y_j^* s^j$ задачи (7.38). Задача (7.39) называется главной для задачи (7.38).

На первый взгляд может казаться, что описанное сведéние исходной задачи к главной нецелесообразно, поскольку для построения задачи (7.39) необходимо определить все крайние точки s^j, $j = 1, 2, \ldots, N$, многогранника $X_{\tilde{A}}$. Число N этих точек может быть очень велико, и их нахождение в таком случае — трудоемкая процедура. Однако весь смысл построения главной задачи заключается в том, что ее можно решить, имея в своем распоряжении для начала лишь одну крайнюю точку многогранника $X_{\tilde{A}}$.

Приведем задачу (7.39) к каноническому виду, введя дополнительные переменные $y_{N+1}, y_{N+2}, \ldots, y_{N+m}$ — по числу ограничений типа неравенств:

$$\max \langle \gamma, y\rangle$$
$$\sum_{j=1}^{N} Q^j y_j + \sum_{i=1}^{N} e^i y_{N+i} = b, \ \sum_{j=1}^{N} y_j = 1,$$
$$y_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, N + m,$$

где e^i — i-й орт пространства $\mathbf{R}^m$.

Для сокращения записи введем обозначения

$$\overline{Q}^j = \begin{pmatrix} Q^j \\ 1 \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \ldots, N,$$

$$\overline{Q}^j = \begin{pmatrix} e^{j-N} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad j = N+1, \ N+2, \ldots, N+m,$$

$$\overline{b} = \begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overline{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_N, 0, \ldots, 0) \in \mathbf{R}^{N+m},$$

$$\overline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_{N+m}).$$

Тогда главная задача в канонической форме принимает вид

$$\max \langle \overline{\gamma}, \overline{y} \rangle \tag{7.40}$$

$$\sum_{j=1}^{N+m} \overline{Q}^j y_j = \overline{b}, \quad y_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, N+m.$$

Допустим, что известен начальный опорный план $y^0 = (y_1^0, y_2^0, \ldots, y_{N+m}^0)$ для задачи (7.40) и его базис $\{\overline{Q}^{i_1}, \overline{Q}^{i_2}, \ldots, \overline{Q}^{i_{m+1}}\}$. Применим для численного решения задачи модифицированный симплекс-метод (см. § 6 гл. V).

Обозначим

$$\sigma = \{i_1, i_2, \ldots, i_{m+1}\}, \ A_\sigma = (\overline{Q}^{i_1}, \overline{Q}^{i_2}, \ldots, \overline{Q}^{i_{m+1}}),$$

$$\overline{\gamma}_\sigma = (\gamma_{i_1}, \gamma_{i_2}, \ldots, \gamma_{i_{m+1}}), \ \overline{y}_\sigma = (y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_{m+1}}).$$

Первый вопрос, который следует выяснить относительно плана y^0 согласно процедуре модифицированного симплекс-метода,— является ли этот план оптимальным? Для этого (см. (5.41), (5.42)) вычисляется вектор

$$\overline{p}^0 = (A_\sigma^{-1})' \overline{\gamma}_\sigma$$

и величины

$$\Delta_j = \langle \overline{Q}^j, \overline{p}^0 \rangle - \overline{\gamma}_j, \quad j \notin \sigma.$$

Обозначим

$$\overline{p}^0 = (p_1^0, p_2^0, \ldots, p_m^0, p_{m+1}^0), \ p^0 = (p_1^0, p_2^0, \ldots, p_m^0).$$

Учитывая, что последняя координата каждого вектора $\overline{Q}^j$, $j = 1, 2, \ldots, N$, равна 1, получаем

$$\Delta_j = \langle Q^j, p^0 \rangle + p_{m+1}^0 - \gamma_j, \quad j \notin \sigma, \quad 1 \leqslant j \leqslant N. \tag{7.41}$$

При $j \geqslant N$ имеем $\Delta_{N+i} = \langle Q^{N+i}, p^0 \rangle - \gamma_{N+i} = p_i^0$, поскольку $\gamma_{N+i} = 0$, $Q^{N+i} = e^i$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Таким образом, значения Δ_j при $j \geqslant N$ известны. Вместе с тем, формула (7.41) не позволяет непосредственно вычислить величины Δ_j, $1 \leqslant j \leqslant N$, поскольку при $j \notin \sigma$ векторы Q^j не известны.

Подставим в (7.41) выражения для Q^j и γ_j через s^j:

$$\Delta_j = \langle As^j, p^0 \rangle - \langle c, s^j \rangle + p_{m+1}^0 = \langle A' p^0 - c, s^j \rangle + p_{m+1}^0,$$
$$j = 1, 2, \ldots, N.$$

Для того чтобы узнать, есть ли среди величин Δ_j, $j = 1, 2, \ldots, N$, отрицательные, достаточно взять тот индекс t, $1 \leqslant t \leqslant N$, для которого значение $\langle A' p^0 - c, s^t \rangle$ минимально среди всех чисел $\langle A' p^0 - c, s^j \rangle$, $1 \leqslant j \leqslant N$, и рассмотреть число Δ_t. Если $\Delta_t \geqslant 0$ и $\Delta_{N+i} \geqslant 0$ для всех $i = 1, 2, \ldots, m$, то план y^0 оптимален. Для нахождения подходящего индекса t нужно решить задачу

$$\min_{1 \leqslant j \leqslant N} \langle A' p^0 - c, s^j \rangle. \tag{7.42}$$

Поскольку минимальное значение линейной функции $\langle A' p^0 - c, x \rangle$ на многограннике $X_{\tilde{A}}$ совпадает с минимальным значением этой функции на множестве крайних точек, то задачу (7.42) можно заменить следующей задачей линейного программирования:

$$\begin{gathered} \min \langle A' p^0 - c, x \rangle \\ \tilde{A} x \leqslant \tilde{b}, \quad x \geqslant 0. \end{gathered} \tag{7.43}$$

Поскольку $\tilde{A}$ — блочно-диагональная матрица, то задача (7.43) распадается на k задач меньшей размерности. Если обозначить через q^h вектор, составленный из координат вектора $A' p^0 - c$ с номерами $r_{h-1} + 1$, $r_{h-1} + 2$, ..., r_h, то решение (7.43) сводится к решению k задач

$$\begin{gathered} \min \langle q^h, x^h \rangle \\ A_h x^h \leqslant b^h, \quad x^h \geqslant 0, \end{gathered} \tag{7.44}$$

для $h = 1, 2, \ldots, k$.

Если x^{*h} — решение задачи (7.44), то вектор $x^* = (x^{*1}, x^{*2}, \ldots, x^{*k})$ является, очевидно, решением для (7.43). Пусть x^* — опорный оптимальный план задачи (7.43), совпадающий с одной из крайних точек многогранника $X_{\widetilde{A}}$. Обозначим $\overline{Q} = \begin{pmatrix} Ax^* \\ 1 \end{pmatrix}$. Вектор $\overline{Q}$ является одним из векторов $\overline{Q}^j$, $1 \leqslant j \leqslant N$. Если $\overline{\Delta} = \langle A'p^0 - c, x^* \rangle + p^0_{m+1} \geqslant 0$, то выполняются условия $\overline{\Delta}_j \geqslant 0$, $j = 1, 2, \ldots \ldots, N$.

Указанный прием позволяет проверить оптимальность плана y^0 и, если он таковым не является определить вектор $\overline{Q}$ (или один из векторов $\overline{Q}^{N+i}$, $1 \leqslant i \leqslant m$), подлежащий введению в базис согласно правилу 1 симплекс-метода.

Для того чтобы найти вектор, выводимый из базиса, теперь можно применить обычную процедуру модифицированного симплекс-метода, в которой требуется лишь знать векторы $A_\sigma^{-1}\overline{Q}$ и $A_\sigma^{-1}y^0_\sigma$. После этого осуществляется переход к новому базису по формуле (5.28).

3. Осталось указать способ нахождения начального опорного плана y^0 для задачи (7.39) или, что то же, для задачи (7.40). Поскольку в (7.40) имеется $m+1$ ограничений, не считая условия неотрицательности переменных, то базис опорного плана (в предположении, что ранг матрицы ограничений равен числу уравнений) должен состоять из $m+1$ векторов. Нетрудно видеть, что для отыскания начального опорного плана достаточно знать одну крайнюю точку многогранника $X_{\widetilde{A}}$. В самом деле, пусть имеется крайняя точка s^1 многогранника $X_{\widetilde{A}}$. Тогда в качестве базиса для (7.40) можно взять $\{\overline{Q}^1, \overline{Q}^{N+1}, \overline{Q}^{N+2}, \ldots \ldots, \overline{Q}^{N+m}\}$, где $\overline{Q}^1 = \begin{pmatrix} As^1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Этот базис соответствует плану $y^0 = \left(y^0_1, y^0_2, \ldots, y^0_{N+m}\right)$, где

$$y^0_1 = 1, \quad y^0_j = 0 \text{ при } 2 \leqslant j \leqslant N,$$

$$y^0_{N+i} = b_i - (As^1)_i \text{ при } 1 \leqslant i \leqslant m.$$

Определение одной крайней точки s^1 многогранника $X_{\widetilde{A}}$ не составляет труда, поскольку если $\overline{x}^h$ — крайняя точка многогранника $\{x | A_h x^h \leqslant b^h,\ x^h \geqslant 0\}$, то $\overline{x} = (\overline{x}^1, \overline{x}^2, \ldots, \overline{x}^k)$ — крайняя точка в $X_{\widetilde{A}}$. Поэтому для отыскания $\overline{x} (= s^1)$ достаточно применить к задачам (7.44) метод нахождения начального опорного плана, как он описан в гл. V.

ГЛАВА VIII. МЕТОД РЕГУЛЯРИЗАЦИИ НЕУСТОЙЧИВЫХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

§ 1. Понятие устойчивости задач линейного программирования

Одна из проблем, возникающих при численном решении задачи линейного программирования вида

$$\max \langle c, x\rangle \qquad\qquad (8.1)$$
$$Ax \leqslant b,$$

связана с тем, что ЭВМ оперирует лишь приближенными значениями параметров задачи, округляемыми в процессе счета. По сути дела происходит замена задачи (8.1) некоторой задачей

$$\max \langle c(\delta), x\rangle \qquad\qquad (8.2)$$
$$A(\delta)x \leqslant b(\delta),$$

где относительно матрицы $A(\delta)$ и векторов $b(\delta)$, $c(\delta)$ известно только, что они в определенной степени близки к истинным значениям соответственно матрицы A и векторов b, c.

Для уточнения понятия близости матриц и векторов будем пользоваться обычной евклидовой метрикой: расстоянием между двумя матрицами $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})$ и $A = (a_{ij})$ размером $m \times n$ назовем число

$$\|A - \bar{A}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij} - \bar{a}_{ij})^2}.$$

Аналогично, если $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$, $\bar{b} = (\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_m)$, то

$$\|b - \bar{b}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}(b_i - \bar{b}_i)^2}.$$

Если фиксированы матрица A и векторы b, c, то для любого $\delta > 0$ символ $A(\delta)$ будет означать, что $A(\delta)$ — некоторая матрица, принадлежащая δ-окрестности матрицы A, т. е.

$$\|A(\delta) - A\| < \delta, \tag{8.3}$$

Аналогично $b(\delta)$, $c(\delta)$ — некоторые векторы, для которых выполнены соотношения

$$\|b(\delta) - b\| < \delta, \tag{8.4}$$

$$\|c(\delta) - c\| < \delta. \tag{8.5}$$

Задачу вида (8.2) будем называть *возмущенной задачей*, принадлежащей δ-окрестности задачи (8.1), если выполнены условия (8.3)—(8.5).

Пусть X^0 — множество решений задачи (8.1), d — ее значение; $X^0(\delta)$ и $d(\delta)$ — соответственно множество решений и значение возмущенной задачи. Первый вопрос, возникающий из сопоставления задач (8.1) и (8.2), касается проблемы существования решения у возмущенной задачи.

Определение 8.1. Задачу (8.1) назовем *устойчивой*, если существует такое число $\delta_0 > 0$, что для всех δ, $0 \leqslant \delta \leqslant \delta_0$, задача (8.2) имеет решение. Другими словами, задача (8.1) устойчива, если она имеет решение, а также имеет решение любая задача, получающаяся из нее небольшими изменениями параметров.

Пусть задача (8.1) устойчива и $\delta > 0$ таково, что возмущенная задача имеет решение $x^*(\delta) \in X^0(\delta)$. Сформулируем возникающие здесь два вопроса.

1) Будет ли величина $d(\delta)$ значения задачи (8.2) близка к числу d?

2) Будет ли вектор $x^*(\delta)$ близок к множеству X^0 решений задачи (8.1)?

Определение 8.2. Задача (8.1) называется *устойчивой по функционалу*, если

а) она устойчива;

б) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что как только выполнены условия (8.3)—(8.5), то $|d(\delta) - d| < \varepsilon$.

Иначе можно сказать, что значение задачи (8.1) как функция $d(A, b, c)$ ее параметров в этом случае непрерывно.

Определение 8.3. Задача (8.1) называется *устойчивой по решению*, если а) она устойчива;

б) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что при выполнении неравенств (8.3)—(8.5) для любого $x^*(\delta) \in X^0(\delta)$ найдется $x^* \in X^0$, удовлетворяющий условию $\|x^*(\delta) - x^*\| < \varepsilon$.

Ясно, что если задача (8.1) неустойчива в смысле хотя бы одного из определений (8.1)—(8.3), то ее решение на ЭВМ может привести к результатам, сильно отличающимся от истинных.

Обсудим еще один аспект, связанный с понятием устойчивости задачи линейного программирования. При исследовании математических моделей реальных явлений существенную роль играет тот факт, что параметры модели, получаемые на основе статистических данных либо в результате экспериментов, известны зачастую приблизительно, с определенной степенью точности. Поэтому, если исследуемая модель имеет вид (8.1), то можно сказать лишь то, что истинная модель явления описывается одной из задач вида (8.2). В связи с этим вопросы о взаимосвязи этих задач актуальны с точки зрения практики.

Цель дальнейшего изложения — получить критерии устойчивости задачи и описать способы ее решения в том случае, когда задача неустойчива.

§ 2. Параметрические системы линейных неравенств

Рассмотрим произвольную систему линейных неравенств

$$Ax \leqslant b. \tag{8.6}$$

Обозначим через K многогранный конус $K = \mathrm{Co}(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ в пространстве $\mathbf{R}^n$, натянутый на вектор-строки матрицы A (т. е. являющийся их конической оболочкой).

Теорема 8.1. *Если множество X решений системы (8.6) непусто, то X ограничено тогда и только тогда, когда $K = \mathbf{R}^n$.*

Доказательство. Пусть $K = \mathbf{R}^n$. Тогда для всякого орта e^j, $j = 1, 2, \ldots, n$, найдется такой неотрицательный вектор p^j, что $e^j = A'p^j$. Если $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X$, то

$$x_j = \langle e^j, x\rangle = \langle A'p^j, x\rangle = \langle p^j, Ax\rangle.$$

Используя неотрицательность p^j и неравенство (8.6), получаем $\langle p^j, Ax\rangle \leqslant \langle p^j, b\rangle$, откуда $x_j \leqslant \langle p^j, b\rangle$, Обозначив $M = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \langle p^j, b \rangle$, имеем $x_j \leqslant M$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Аналогично можно получить оценку $x_j \geqslant \overline{M}$, воспользовавшись тем, что $-e^j \in K$. Таким образом, для любого $x \in X$ выполняются неравенства $\overline{M} \leqslant x_j \leqslant M$, $j = 1, 2, \ldots, n$, и значит, множество X ограничено.

Обратно, предположим, что множество X непусто и ограничено, т. е. существуют такие константы M и $\overline{M}$, что неравенства $\langle e^j, x \rangle \leqslant M$, $\langle -e^j, x \rangle \leqslant \overline{M}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, выполняются для любого $x \in X$. Это означает, что каждое из этих неравенств является следствием системы (8.6). Из теоремы 2.27 вытекает, что в таком случае существуют векторы $p^j \geqslant 0$, $q^j \geqslant 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, для которых выполняются равенства $A'p^j = e^j$, $A'q^j = -e^j$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Последнее означает, что конус K совпадает со всем пространством $\mathbf{R}^n$. Теорема доказана.

По определению конуса, в том случае, когда $K = \mathbf{R}^n$, всякий вектор $c \in \mathbf{R}^n$ можно представить в виде неотрицательной линейной комбинации строк матрицы A. Следующая лемма уточняет этот факт, утверждая, что все коэффициенты линейной комбинации можно взять положительными.

Лемма 8.1. *Если конус K совпадает со всем пространством $\mathbf{R}^n$, то для любого $c \in \mathbf{R}^n$ существует такой вектор $p > 0$, что $A'p = c$.*

Доказательство. Покажем вначале, что существует такой вектор $\bar{p} > 0$, что $A\bar{p} = 0$. Предположим противное. Тогда согласно теореме 2.30, найдется вектор $\bar{x} \in \mathbf{R}^n$, для которого $A\bar{x} \geqslant 0$, $A\bar{x} \neq 0$. Для этого вектора $\bar{x}$ существует такой неотрицательный вектор $q \geqslant 0$, что $-\bar{x} = A'q$ (так как $K = \mathbf{R}^n$). Умножив это равенство скалярно на вектор $\bar{x}$, получаем $-\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle = \langle A'q, \bar{x} \rangle = \langle q, A\bar{x} \rangle \geqslant 0$, откуда вытекает, что $\bar{x} = 0$. Но это противоречит условию $A\bar{x} \neq 0$. Если теперь $c \in \mathbf{R}^n$ — произвольный вектор и $A'p = c$, то $A'(p + \bar{p}) = c$ и $p + \bar{p} > 0$. Лемма доказана.

Аналогично тому, как мы сделали в § 1 для задачи линейного программирования, сопоставим системе линейных неравенств (8.6) возмущенную систему

$$A(\delta)x \leqslant b(\delta), \tag{8.7}$$

где $A(\delta)$ и $b(\delta)$ удовлетворяют условиям (8.3) и (8.4).

Для дальнейшего понадобятся некоторые сведения из линейной алгебры, которыми мы на протяжении предыдущего материала не пользовались.

Лемма 8.2. *Если элементы* b_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, *квадратной* $n \times n$-*матрицы* $B = (b_{ij})$ *достаточно малы по абсолютной величине, то матрица* $(I - B)$ *невырождена. (Здесь* I *— единичная матрица порядка* $n \times n$.)

Доказательство. Покажем, что если $|b_{ij}| < 1/n$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, то $I - B$ — невырожденная матрица. Допустим противное, тогда существует ненулевой вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющий равенству $(I - B)x = 0$, причем можно считать, что $\sum_{j=1}^{n} |x_j| = 1$. В таком случае $x = Bx$, или $x_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Воспользовавшись свойствами абсолютной величины числа, получаем $|x_i| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}| |x_j|$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Суммируя правую и левую часть этого неравенства по i, имеем

$$1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} |b_{ij}| \right) |x_j| < \sum_{j=1}^{n} |x_j| = 1.$$

Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 8.3. *Пусть матрица* A *размеров* $m \times n$ $(m \geqslant n)$ *имеет ранг* n, *т. е. ее столбцы* a^j, $j = 1, 2, \ldots, n$, *линейно независимы. Тогда матрица* $A'A$ *невырождена.*

Доказательство. Отметим, что матрица $A'A$ имеет размеры $n \times n$. Пусть $x \in \mathbf{R}^n$ таков, что $A'Ax = 0$. Умножив это равенство скалярно на x, получаем $0 = \langle A'Ax, x \rangle = \langle Ax, Ax \rangle$. Отсюда $Ax = 0$. Поскольку

$$0 = Ax = x_1a^1 + x_2a^2 + \ldots + x_na^n,$$

то в силу линейной независимости столбцов матрицы A получаем $x_j = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Следовательно, из равенства $A'Ax = 0$ вытекает $x = 0$, что и означает невырожденность матрицы $A'A$.

Лемма 8.4. *Если элементы* d_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, *матрицы* $D = (d_{ij})$ *достаточно малы по абсолютной величине, матрица* A *размеров* $m \times n$ *имеет ранг* n, *то матрица* $A'(A - D)$ *невырождена.*

Доказательство. Так как $A'(A - D) = A'A - A'D$, то воспользовавшись тем, что у матрицы $A'A$ существует обратная (лемма 8.3), можно написать $A'(A - D) =$

$= A'A(I - (A'A)^{-1}A'D)$. Матрица $(A'A)^{-1}A'$ фиксирована, поэтому с помощью матрицы D можно добиться, чтобы все элементы матрицы $B = (A'A)^{-1}A'D$ были сколь угодно малы по абсолютной величине. Согласно лемме 8.2, матрица $I - B$ будет в таком случае невырожденной. Тогда $A'(A - D)$ также невырождена как произведение двух невырожденных матриц $A'A$ и $I—B$.

Следующая лемма является основным инструментом для изучения свойств семейства линейных неравенств вида (8.7).

Лемма 8.5. *Пусть ранг матрицы A размера $m \times n$ равен n, вектор $p \in \mathbf{R}^m$ таков, что $p > 0$ и $A'p = g$, где $g \in \mathbf{R}^n$ — некоторый фиксированный вектор. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta_0 > 0$, что для всякого δ, $0 \leqslant \delta \leqslant \delta_0$, существует вектор $p(\delta)$, удовлетворяющий условиям*

$$A'(\delta)p(\delta) = g, \tag{8.8}$$

$$p(\delta) > 0, \tag{8.9}$$

$$\|p(\delta) - p\| < \varepsilon. \tag{8.10}$$

Доказательство. Будем искать вектор $p(\delta)$ в виде

$$p(\delta) = p + Ax(\delta), \quad \text{где} \quad x(\delta) \in \mathbf{R}^n.$$

Тогда

$$g = A'(\delta)p(\delta) = A'(\delta)p + A'(\delta)Ax(\delta). \tag{8.11}$$

Обозпачим $A - A(\delta) = D$, т. е. $\|D\| < \delta$. Из леммы 8.4 вытекает, что если δ достаточно мало, то матрица $A'A(\delta) = A'(A - D)$ невырождена. Из (8.11) получаем, что при всех таких δ

$$(A'(\delta)A)^{-1}g - (A'(\delta)A)^{-1}A'(\delta)p = x(\delta) \tag{8.12}$$

(поскольку $A'(\delta)A = (AA'(\delta))'$ — также невырожденная матрица).

Так как элементы обратной матрицы являются непрерывной функцией элементов прямой матрицы, то

$$\lim_{\delta \to 0} (A'(\delta)A)^{-1} = (A'A)^{-1}.$$

Следовательно, существует предел

$$\lim_{\delta \to 0} x(\delta) = (A'A)^{-1}g - (A'A)^{-1}A'p = 0,$$

так как $A'p = g$. Отсюда получаем, что существует предел

$$\lim_{\delta \to 0} (p(\delta) - p) = \lim_{\delta \to 0} Ax(\delta) = 0.$$

Таким образом, вектор $p(\delta) = p + Ax(\delta)$, где $x(\delta)$ задается формулой (8.12), удовлетворяет условию (8.8). Поскольку $\lim\limits_{\delta\to 0} p(\delta) = p$, то при достаточно малом $\delta_0 > 0$ неравенство (8.10) выполняется для всех δ, $0 \leqslant \delta \leqslant \delta_0$. Условие (8.9) также выполняется при достаточно малом δ_0, поскольку $p > 0$.

Теорема 8.2. *Если множество X решений системы неравенств* (8.6) *непусто и ограничено, то существует такое число $\delta_0 > 0$, что для любого δ, $0 \leqslant \delta \leqslant \delta_0$, все множества $X(\delta)$ ограничены в совокупности* (*хотя некоторые из $X(\delta)$, возможно, совпадают с пустым множеством*).

Доказательство. Из теоремы 8.1 и леммы 8.1 следует, что существуют такие векторы $p^j > 0$, $q^j > 0$, что $A'p^j = e^j$, $A'q^j = -e^j$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Кроме того, из теоремы 8.1 следует также, что ранг матрицы A равен n. Из леммы 8.5 заключаем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta_0 > 0$, что для любого δ, $0 \leqslant \delta \leqslant \delta_0$, найдутся векторы $p^j(\delta) > 0$, $q^j(\delta) > 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, удовлетворяющие условиям

$$A'(\delta)p^j(\delta) = e^j, \tag{8.13}$$

$$A'(\delta)q^j(\delta) = -e^j, \tag{8.14}$$

$$\|p^j(\delta) - p^j\| < \varepsilon, \tag{8.15}$$

$$\|q^j(\delta) - q^j\| < \varepsilon, \tag{8.16}$$

$$j = 1, 2, \ldots, n.$$

Пусть $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ принадлежит одному из множеств $X(\delta)$ при $0 \leqslant \delta \leqslant \delta_0$. Умножив (8.13) скалярно на вектор x, получим

$$x_j = \langle x, e^j\rangle = \langle x, A'(\delta)p^j(\delta)\rangle = \\ = \langle A(\delta)x, p^j(\delta)\rangle \leqslant \langle b(\delta), p^j(\delta)\rangle.$$

Обозначим через Q δ_0-окрестность вектора b: $Q = \{y \mid y \in \mathbf{R}^m, \ \|y - b\| \leqslant \delta_0\}$. Положим также $S^j = \{s \mid s \in \mathbf{R}^m, \|s - p^j\| \leqslant \varepsilon\}$. Очевидно, что Q и S^j — компактны и $b(\delta) \in Q$, $p^j(\delta) \in S^j$. Пусть

$$M^j = \max_{\substack{y \in Q \\ s \in S^j}} \langle y, s\rangle.$$

Тогда $x_j \leqslant M^j$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Аналогично можно получить нижнюю оценку $\overline{M}^j$ для координат x_j вектора $x \in X(\delta)$, используя (8.14), (8.16). Поскольку числа M^j, $\overline{M}^j$ не зависят от δ при $0 \leqslant \delta \leqslant \delta_0$, то тем самым теорема доказана.

§ 3. Необходимые и достаточные условия устойчивости задач линейного программирования

Цель данного параграфа — показать, что все три понятия устойчивости задачи линейного программирования, введенные в § 1, эквивалентны, и вывести необходимые и достаточные условия, при которых задача (8.1) обладает этими свойствами.

Как видно из результатов § 2, особую роль играет случай, когда ранг матрицы A ограничений равен n — числу ее столбцов.

Определение 8.4. Конус $K = \mathrm{Co}(a_1, a_2, \ldots, a_m) \subseteq \mathbf{R}^n$, натянутый на вектор-строки матрицы A, назовем *телесным*, если ранг матрицы A равен n — числу ее столбцов.

Определение 8.5. Вектор $c \in \mathbf{R}^n$ назовем *внутренним* для конуса K, если существует такой вектор $p \in \mathbf{R}^m$, что $p > 0$, $A'p = c$.

Важное значение при изучении устойчивости задачи (8.1) играет относительное расположение вектора c и конуса K.

Определение 8.6. Будем говорить, что пара (K, c) находится *в общем положении*, если многогранный конус K — телесный, а вектор c является его внутренней точкой.

Сопоставим конусу K и вектору c многогранный конус $K^c = \mathrm{Co}(-c, K) \subseteq \mathbf{R}^n$.

Лемма 8.6. *Пара (K, c) находится в общем положении тогда и только тогда, когда $K^c = \mathbf{R}^n$.*

Доказательство. Пусть $K^c = \mathbf{R}^n$. Из леммы 8.1 получаем, что существуют положительное число $\alpha > 0$ и вектор $p > 0$, такие, что $c = -\alpha c + A'p$, откуда $c = A'\bar{p}$, где $\bar{p} = p/(1+\alpha) > 0$. Тем самым показано, что c — внутренняя точка конуса K. Пусть $x \in \mathbf{R}^n$ — произвольный вектор. Используя равенство $K^c = \mathbf{R}^n$, получаем, что найдутся неотрицательные число $\alpha(x) \geqslant 0$ и вектор $p(x) \geqslant 0$, для которых $x = -\alpha(x)c + A'p(x)$. Подставляя выражение для c через образующие конуса K, получаем

$$x = -\alpha(x)A'\bar{p} + A'p(x) = A'(-\alpha(x)\bar{p} + p(x)).$$

Это означает, что произвольный вектор $x \in \mathbf{R}^n$ выражается в виде линейной комбинации вектор-строк матрицы A. Отсюда выводим, что ранг матрицы A равен n, т. е. конус K — телесный.

Докажем утверждение в обратную сторону. Пусть K — телесный конус, c — его внутренняя точка, т. е. существует такой вектор $p > 0$, что $A'p = c$. Предположим, что $K^c \neq \mathbf{R}^n$. Тогда существует опорная гиперплоскость к многогранному конусу K^c, т. е. существует вектор $\bar{x}$, удовлетворяющий условиям $\bar{x} \neq 0$, $\langle \bar{x}, x \rangle \leqslant 0$ для всех $x \in K^c$. В частности, $\langle \bar{x}, -c \rangle \leqslant 0$, $\langle \bar{x}, a_i \rangle \leqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, т. е. $\langle \bar{x}, c \rangle \geqslant 0$ и $A\bar{x} \leqslant 0$. Вектор $A\bar{x} = \bar{x}_1 a^1 + \bar{x}_2 a^2 + \ldots + \bar{x}_n a^n$ — не нулевой, так как столбцы матрицы A линейно независимы. Следовательно, хотя бы одна из координат вектора $A\bar{x}$ строго меньше нуля. Учитывая, что $p > 0$, получаем

$$0 > \langle p, A\bar{x} \rangle = \langle A'p, \bar{x} \rangle = \langle c, \bar{x} \rangle \geqslant 0.$$

Полученное противоречие завершает доказательство.

Лемма 8.7. *Если многогранный конус* $C = \mathrm{Co}(g_1, g_2, \ldots, g_r)$ *совпадает с пространством* $\mathbf{R}^n$, *то существует такое* $\delta_0 > 0$, *что для всякого* δ, $0 \leqslant \delta \leqslant \delta_0$, *возмущенный конус* $C(\delta) = \mathrm{Co}(g_1(\delta), g_2(\delta), \ldots, g_r(\delta))$ *также совпадает с* $\mathbf{R}^n$.

Доказательство. Предположим, что утверждение неверно, и пусть $\{\delta_k\}$ — такая последовательность, что $\delta_k > 0$, $\lim\limits_{k\to\infty} \delta_k = 0$ и каждый конус $C(\delta_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, не совпадает с $\mathbf{R}^n$. Тогда для каждого $C(\delta_k)$ существует опорная гиперплоскость, т. е. такой вектор y^k, $\|y^k\| = 1$, что $\langle y^k, x \rangle \leqslant 0$ для всех $x \in C(\delta_k)$. В частности,

$$\langle y^k, g_i(\delta_k) \rangle \leqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, r. \tag{8.17}$$

Поскольку векторы y^k, $k = 1, 2, \ldots$, ограничены по норме, то последовательность $\{y^k\}$ можно считать сходящейся к некоторому y^0:

$$\lim_{k\to\infty} y^k = y^0, \ \|y^0\| = 1,$$

т. е. $y^0 \neq 0$.

Согласно нашим обозначениям, символ $g_i(\delta)$ означает, что $\lim\limits_{\delta\to 0} g_i(\delta) = g_i$. Перейдя в (8.17) к пределу при $k \to \infty$, получим $\langle y^0, g_i \rangle \leqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, r$. Отсюда следует, что $\langle y^0, x \rangle \leqslant 0$ для всякого $x \in C$, причем $y^0 \neq 0$. Последнее, однако, невозможно, так как $C = \mathbf{R}^n$.

Рассмотрим задачу, двойственную к (8.1):

$$\min \langle b, p\rangle$$
$$A'p = c, \quad p \geqslant 0. \tag{8.18}$$

Рассмотрим конус

$$K^D = \mathrm{Co}\,(a^1, a^2, \ldots, a^n, -a^1, -a^2, \ldots, -a^n, v^1, v^2, \ldots, v^m),$$

где a^j, $j = 1, 2, \ldots, n$, — j-й столбец матрицы A, v^i — i-й орт пространства $\mathbf{R}^m$.

Очевидно, что задача (8.1) допустима тогда и только тогда, когда $b \in K^D$. Двойственная ей задача (8.18) допустима тогда и только тогда, когда $c \in K$.

Теорема 8.3. *Задача* (8.1) *устойчива в смысле определения* 8.1 *тогда и только тогда, когда каждая пара* (K, c) *и* (K^D, b) *находится в общем положении.*

Доказательство. Пусть задача (8.1) устойчива. Покажем, что в таком случае оба множества X^0 и P^0 решений соответственно прямой и двойственной задачи ограничены.

Пусть, например, множество X^0 неограничено. Тогда, как следует из гл. II, X^0 содержит луч вида $x^0 + \lambda s$, $\lambda \geqslant 0$, где s — некоторое направление, $s \neq 0$, $\langle c, s\rangle = 0$. Пусть $\bar{c} \in \mathbf{R}^n$ — любой такой вектор, что $\|\bar{c}\| = 1$, $\langle \bar{c}, s\rangle > 0$. Рассмотрим возмущенную задачу вида (8.2), где $A(\delta) = A$, $b(\delta) = b$, $c(\delta) = c + \delta\bar{c}$. Тогда вектор $x(\lambda) = x^0 + \lambda s$ принадлежит $X^0 \subseteq X$ при любом $\lambda > 0$, однако целевая функция $\langle c(\delta), x(\lambda)\rangle = \langle c(\delta), x^0\rangle + \lambda\delta\langle \bar{c}, s\rangle$ при любом фиксированном $\delta > 0$ растет неограниченно при $\lambda \to \infty$, т. е. задача (8.2) не имеет решения.

Таким образом, ограниченность множества X^0 — необходимое условие устойчивости задачи (8.1). Аналогично доказывается утверждение относительно множества P^0 с использованием того факта, что значение прямой и двойственной задач совпадают.

Поскольку множество X^0 может быть задано системой линейных неравенств $\langle -c, x\rangle \leqslant -d$, $Ax \leqslant b$, где d — значение задачи, то из ограниченности множества X^0 и теоремы 8.1 вытекает, что $K^c = \mathbf{R}^n$. Лемма 8.6 утверждает, что в таком случае пара (K, c) находится в общем положении. Аналогично, множество P^0 задается системой неравенств $\langle b, p\rangle \leqslant d$, $A'p \leqslant c$, $-A'p \leqslant -c$, $-p \leqslant 0$, Из ограниченности множества P^0 и теоремы 8.1 получаем, что конус $\mathrm{Co}(-K^D, b)$ совпадает с $\mathbf{R}^m$. Тогда $\mathrm{Co}(K^D, -b) = \mathbf{R}^m$.

Из леммы 8.6 теперь следует, что пара (K^D, b) находится в общем положении.

Наоборот, пусть каждая из пар (K^D, b) и (K, c) находится в общем положении.

По лемме 8.6 конусы $\mathrm{Co}(-c, K)$ и $\mathrm{Co}(-b, K^D)$ совпадают соответственно с $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{R}^m$. В таком случае, согласно лемме 8.7, конусы $\mathrm{Co}(-c(\delta), K(\delta))$ и $\mathrm{Co}(-b(\delta), K^D(\delta))$, отвечающие возмущенной задаче (8.2) при всяком δ, $0 \leqslant \delta \leqslant \delta_0$, также совпадают соответственно с $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{R}^m$, откуда с помощью леммы 8.6 получаем, что каждая из пар $(K(\delta), c(\delta))$ и $(K^D(\delta), b(\delta))$ находится в общем положении. Это, в частности, означает, что $c(\delta) \in K(\delta)$ и $b(\delta) \in K^D(\delta)$. В соответствии со сделанным выше замечанием получаем, что задача (8.1) и двойственная ей допустимы при любом δ, $0 \leqslant \delta \leqslant \delta_0$, а следовательно, обе имеют решение.

Теорема 8.4. *Если каждая из пар* (K, c) *и* (K^D, b) *находится в общем положении, то задача* (8.1) *устойчива по функционалу и по решению.*

Доказательство. Рассмотрим систему уравнений и неравенств в пространстве $\mathbf{R}^{n+m}$:

$$\begin{gathered} \langle c, x\rangle = \langle b, p\rangle, \\ Ax \leqslant b, \quad A'p = c, \quad p \geqslant 0. \end{gathered} \tag{8.19}$$

Из теории двойственности известно, что эта система имеет решение тогда и только тогда, когда имеют решение взаимодвойственные задачи (8.1) и (8.18), и множество ее решений совпадает с множеством $X^0 \times P^0 = \{(x, p) \mid x \in X^0, \ p \in P^0\}$. Из условий теоремы вытекает, что множества X^0 и P^0 непусты и ограничены, откуда следует, что непусто и ограничено множество $X^0 \times P^0$.

Сопоставим возмущенной задаче (8.2) систему

$$\begin{gathered} \langle c(\delta), x\rangle = \langle b(\delta), p\rangle, \\ A(\delta)x \leqslant b(\delta), \quad A'(\delta)p = c(\delta), \quad p \geqslant 0. \end{gathered} \tag{8.20}$$

Из теоремы 8.3 следует, что существует число $\delta_0 > 0$ такое, что при всех δ, $0 \leqslant \delta \leqslant \delta_0$, множество $X^0(\delta) \times P^0(\delta)$ решений системы (8.20) непусто. Из теоремы 8.2 следует, что множества $X^0(\delta)\times P^0(\delta)$ ограничены в совокупности при $0\leqslant\delta\leqslant\delta_0$.

Предположим, что утверждение теоремы не выполняется. Тогда существует такая последовательность $\{\delta_k\}$ положительных чисел, $\lim\limits_{k\to\infty}\delta_k=0$, что либо последовательность $d(\delta_k)$ не сходится к числу d — значению задачи (8.1), либо найдется такое число $\varepsilon>0$, что $\|x-x(\delta_k)\|\geqslant\varepsilon$ при всех $x(\delta_k)\in X^0(\delta_k)$, $k=1, 2, \ldots$, и всех $x\in X^0$.

Пусть $x(\delta_k)\in X^0(\delta_k)$, $p(\delta_k)\in P^0(\delta_k)$ — произвольные векторы, $k=1, 2, \ldots$ Поскольку множества $X^0(\delta)\times P^0(\delta)$ ограничены в совокупности, то последовательности $\{x(\delta_k)\}$ и $\{p(\delta_k)\}$ можно считать сходящимися. Пусть

$$\lim_{k\to\infty}x(\delta_k)=x^0,\qquad \lim_{k\to\infty}p(\delta_k)=p^0.$$

Поскольку векторы $x(\delta_k)$, $p(\delta_k)$ удовлетворяют системе (8.20) при $\delta=\delta_k$, а функции $A(\delta)$, $b(\delta)$, $c(\delta)$ непрерывны, то переходя в (8.20) к пределу при $k\to\infty$, получаем

$$\langle c,\ x^0\rangle=\langle b,\ p^0\rangle,$$
$$Ax^0\leqslant b,\quad A'p^0=c,\quad p^0\geqslant 0.$$

Как уже отмечалось, это означает, что $x^0\in X^0$, $p^0\in P^0$ и $\langle c,\ x^0\rangle=d$. В таком случае равенство $\lim\limits_{k\to\infty}x(\delta_k)=x^0$ противоречит условию $\|x^0-x(\delta_k)\|\geqslant\varepsilon$. Поскольку

$$\lim_{k\to\infty}d(\delta_k)=\lim_{k\to\infty}\langle x(\delta_k),\ c\rangle=\langle x^0,\ c\rangle=d,$$

то тем самым показано, что не может осуществиться и вторая возможность.

Теоремы 8.3 и 8.4 завершают доказательство того факта, что все три понятия устойчивости задачи линейного программирования эквивалентны. Поэтому, начиная с данного момента, термин «устойчивость задачи линейного программирования» будет употребляться без каких-либо уточнений.

Теорема 8.3 позволяет сформулировать более удобные критерии устойчивости применительно к каждому типу задач линейного программирования.

Приведем соответствующие критерии для трех типов задач — вида (8.1), стандартной и канонической.

Теорема 8.5. *Задача* (8.1) *устойчива тогда и только тогда, когда*

1) *ранг матрицы A равен n — числу столбцов;*

2) *существуют такие векторы* $x^0 \in \mathbf{R}^n$ *и* $p^0 \in \mathbf{R}^m$, *что* $Ax^0 < b$, $A'p^0 = c$, $p^0 > 0$.

Доказательство. Согласно теореме 8.3 и определениям 8.4—8.6 задача (8.1) устойчива в том и только в том случае, когда ранг матрицы A равен n, и существуют такие векторы $p^0 \in \mathbf{R}^m$, $y^0 \in \mathbf{R}^n$, $z^0 \in \mathbf{R}^n$, $w^0 \in \mathbf{R}^m$, что $p^0 > 0$, $y^0 > 0$, $z^0 > 0$, $w^0 > 0$ и $A'p^0 = c$, $Ay^0 - Az^0 + w^0 = b$. Положив $x^0 = y^0 - z^0$, получим, что последнее условие эквивалентно неравенству $Ax^0 < b$.

Теорема 8.6. *Стандартная задача линейного программирования*

$$\max \langle c, x\rangle$$

$$Ax \leqslant b, \quad x \geqslant 0$$

устойчива тогда и только тогда, когда существуют такие векторы $x^0 \in \mathbf{R}^n$ *и* $p^0 \in \mathbf{R}^m$, *что* $x^0 > 0$, $p^0 > 0$, $Ax^0 < b$, $A'p^0 > c$.

Доказательство. Приведем данную задачу к виду (8.1):

$$\max \langle c, x\rangle$$

$$Ax \leqslant b, \quad -x \leqslant 0.$$

Тогда $K = \mathrm{Co}\,(a_1, a_2, \ldots, a_m, -e^1, -e^2, \ldots, -e^n)$. Конус K — телесный независимо от свойств матрицы A, так как содержит n линейно независимых векторов $-e^j$, $j = 1, 2, \ldots, n$. В таком случае из условий теоремы 8.3 остается лишь требование, чтобы вектор c был внутренним для K, т. е. чтобы существовали положительные векторы $p^0 \in \mathbf{R}^m$ и $y^0 \in \mathbf{R}^n$, для которых $A'p^0 - y^0 = c$, т. е. $A'p^0 > c$. Аналогично доказывается утверждение относительно вектора x^0.

Теорема 8.7. *Каноническая задача линейного программирования*

$$\max \langle c, x\rangle$$

$$Ax = b, \quad x \geqslant 0$$

устойчива тогда и только тогда, когда

1) *ранг матрицы* A *равен* m — *числу ее строк;*

2) *существуют такие векторы* $x^0 \in \mathbf{R}^n$ *и* $p^0 \in \mathbf{R}^m$, *что* $Ax^0 = b$, $x^0 > 0$, $A'p^0 > c$.

Данное утверждение не нуждается в доказательстве, поскольку совпадает с теоремой 8.5, только здесь прямая и двойственная задача поменялись местами.

§ 4. Регуляризация неустойчивых задач

Рассмотрим стандартную задачу линейного программирования

$$\max \langle c, x\rangle$$
$$Ax \leqslant b, \quad x \geqslant 0. \tag{8.21}$$

Предположим, что данная задача неустойчива. Как следует из теоремы 8.6, это может происходить по двум причинам: не существует положительного вектора $x^0 > 0$, для которого $Ax^0 < b$; не существует положительного вектора $p^0 > 0$, для которого $A'p^0 > c$. В любом из этих случаев решение задачи (8.21) на ЭВМ может привести к результатам, сильно отличающимся от истинных. Отметим, что даже в тех случая, когда задача (8.21) устойчива, этот факт часто нельзя установить по ее внешнему виду.

В рамках общей методологии регуляризации некорректных задач, принадлежащей А. Н. Тихонову (см., например, [25]), построены методы, позволяющие решать произвольную задачу линейного программирования с любой степенью точности безотносительно к тому, устойчива она или нет.

Изложим метод регуляризации, не выводящий за рамки линейного программирования.

Будем предполагать, что задача (8.21) имеет решение. В частности, это означает, что допустима как задача (8.21), так и двойственная к ней, т. е. существуют векторы $\bar{x} \geqslant 0$: $A\bar{x} \leqslant b$, и $\bar{p} \geqslant 0$: $A\bar{p} \geqslant c$.

Сопоставим (8.21) возмущенную задачу вида

$$\begin{gathered}\max \langle c - \delta e, x\rangle \\ Ax \leqslant b + \delta v, \quad x \geqslant 0,\end{gathered} \tag{8.22}$$

где $\delta > 0$ — число, $e = (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbf{R}^n$, $v = (1, 1, \ldots$ $\ldots, 1) \in \mathbf{R}^m$.

Лемма 8.8. *Если задача* (8.21) *имеет решение, то задача* (8.22) *устойчива при любом* $\delta > 0$.

Доказательство. Покажем, что для задачи (8.22) выполняются условия теоремы 8.6. Положим $x^0 = \bar{x} + \alpha e$, $p^0 = \bar{p} + \alpha v$. Поскольку $A\bar{x} < b + \delta v$, $A'\bar{p} > c - \delta e$, то найдется такое число $\alpha > 0$, что

$$Ax^0 = A\bar{x} + \alpha Ae < b + \delta v,$$

$$A'p^0 = A'\bar{p} + \alpha A'v > c - \delta e.$$

При этом $x^0 > 0$, $p^0 > 0$.

Обозначим через d значение задачи (8.21), через $d(\delta)$ — значение задачи (8.22).

Теорема 8.8. $\lim\limits_{\delta \to 0} d(\delta) = d$.

Доказательство. Пусть x^* и p^* — решения соответственно задачи (8.21) и двойственной к ней. Вектор x^* допустим для (8.22) при любом $\delta > 0$. Следовательно, $\langle c - \delta e, x^* \rangle \leqslant d(\delta)$, или $\langle c, x^* \rangle - \delta \langle e, x^* \rangle \leqslant d(\delta)$. Учитывая, что $\langle c, x^* \rangle = d$, получим

$$d(\delta) \geqslant d - \delta \langle e, x^* \rangle. \qquad (8.23)$$

Проведя аналогичные рассуждения для задач, двойственных к (8.21) и (8.22), получим $d(\delta) \leqslant d + \delta \langle v, p^* \rangle$. Объединяя все это вместе, имеем

$$d - \delta \langle e, x^* \rangle \leqslant d(\delta) \leqslant d + \delta \langle v, p^* \rangle,$$

откуда и вытекает утверждение теоремы.

Осталось показать, что решение $x(\delta)$ задачи (8.22) при малых δ близко к множеству X^0 решений задачи (8.21).

Лемма 8.9. *Пусть* $\delta_0 > 0$. *Множество* $X^0(\delta)$ *решений задачи* (8.22) *ограничено в совокупности при всех* $0 < \delta \leqslant \delta_0$.

Доказательство. Пусть $x^* \in X^0$ — решение задачи (8.21), p^* — решение двойственной задачи Тогда $A'p^* - c \geqslant 0$ и $A'p^* - (c - \delta e) \geqslant \delta e$. Умножим данное неравенство скалярно на произвольный вектор $x(\delta) \in X^0(\delta)$:

$$\langle x(\delta), A'p^* \rangle - \langle x(\delta), c - \delta e \rangle \geqslant \delta \langle e, x(\delta) \rangle.$$

Так как $\langle x(\delta), c - \delta e \rangle = d(\delta)$,

$$\langle x(\delta), A'p^* \rangle = \langle Ax(\delta), p^* \rangle \leqslant$$
$$\leqslant \langle b + \delta v, p^* \rangle = \langle b, p^* \rangle + \delta \langle v, p^* \rangle = d + \delta \langle v, p^* \rangle,$$

то $\delta \langle e, x(\delta) \rangle \leqslant d + \delta \langle v, p^* \rangle - d(\delta)$. Воспользовавшись (8.23), получаем

$$\delta \langle e, x(\delta) \rangle \leqslant \delta \langle v, p^* \rangle + \delta \langle e, x^* \rangle,$$

откуда

$$\langle e, x(\delta) \rangle \leqslant \langle v, p^* \rangle + \langle e, x^* \rangle.$$

Поскольку $e > 0$, $x(\delta) \geqslant 0$, а правая часть полученного неравенства от δ не зависит, то лемма доказана.

Теорема 8.9. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для каждого решения $x(\delta) \in X^0(\delta)$ задачи* (8.22) *найдется решение $x^* \in X^0$ задачи* (8.21), *удовлетворяющее неравенству $\|x(\delta) - x^*\| < \varepsilon$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда найдется последовательность $\{\delta_k\}$ положительных чисел: $\lim\limits_{k\to\infty} \delta_k = 0$, и последовательность векторов $x(\delta_k) \in X^0(\delta_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, для которых выполняется неравенство

$$\|x(\delta_k) - x\| \geqslant \varepsilon \tag{8.24}$$

при любом $x \in X^0$.

Поскольку множества $X^0(\delta)$, согласно лемме 8.9, ограничены в совокупности при $0 < \delta \leqslant \delta_0$, то последовательность $\{x(\delta_k)\}$ можно считать сходящейся. Пусть

$$x^* = \lim_{k\to\infty} x(\delta_k). \tag{8.25}$$

Каждый из векторов $x(\delta_k)$ удовлетворяет условиям

$$\langle c - \delta_k e,\ x(\delta_k)\rangle = d(\delta_k),$$

$$Ax(\delta_k) \leqslant b + \delta_k v, \quad x(\delta_k) \geqslant 0.$$

Переходя к пределу при $k \to \infty$ в данной системе неравенств и уравнений и учитывая, что $\lim\limits_{k\to\infty} d(\delta_k) = d$ (по теореме 8.8), получим

$$\langle c, x^*\rangle = d, \quad Ax^* \leqslant b, \quad x^* \geqslant 0.$$

Это означает, что $x^* \in X^0$. В таком случае формулы (8.24) и (8.25) противоречат друг другу.

Таким образом, теоремы 8.8 и 8.9 обосновывают следующий способ решения неустойчивой задачи вида (8.21): выбрать последовательность положительных чисел $\{\delta_k\}$ такую, что $\lim\limits_{k\to\infty} \delta_k = 0$, и решать поочередно задачи (8.22) для $k = 1, 2, \ldots$, где следует положить $\delta = \delta_k$.

ДОБАВЛЕНИЕ. О НОВОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Практика трех десятилетий решения задач линейного программирования показала высокую эффективность симплекс-метода и различных его модификаций. Так, при решении задачи с m ограничениями и n переменными, как правило, оказывалось достаточно m итераций, причем количество элементарных арифметических операций было близко к числу n^2m. Одновременно делались попытки теоретически оценить «трудоемкость» решения задач линейного программирования в зависимости от исходных параметров. В 1972 г. американские ученые В. Кли и Дж. Минти построили пример задачи линейного программирования с n переменными и $2n$ ограничениями, для решения которой требуется не менее 2^n-1 итераций симплекс-метода. Тем самым было показано, что симплекс-метод на классе всех линейных задач является алгоритмом «экспоненциальной трудоемкости» — количество необходимых вычислений оценивается экспоненциальной функцией параметров задачи. Аналогичные примеры известны для метода потенциалов транспортной задачи. Эти факты малоутешительны — они говорят о том, что существуют задачи не слишком большой размерности, решение которых симплекс-методом невозможно за обозримое время. Хотя все примеры подобного рода весьма искусственны и при решении задач, пришедших из практики, ничего подобного не происходит, тем не менее возник вопрос: существует ли алгоритм, для которого необходимый объем вычислений при решении произвольной задачи линейного программирования выражается полиномом от параметров задачи? Другими словами, обладает ли класс задач линейного программирования экспоненциальной сложностью либо эта сложность полиномиальна?

Мы не будем уточнять понятие «сложности», «трудоемкости» алгоритма, довольствуясь интуитивным пониманием этих терминов. Сделаем лишь следующие замечания. Поскольку любая ЭВМ оперирует лишь рациональными числами с определенным числом разрядов, то, говоря о сложности алгоритмов, можно ограничиться задачами, в которых все входные параметры (элементы матрицы A, координаты векторов b и c) — рациональные числа. Более того, можно считать, что все параметры задачи — целые числа (для чего нужно лишь все рациональности привести к общему знаменателю). Естественно, что необходимая точность вычислений (т. е. число разрядов) должна учитываться при оценке сложности алгоритма.

Пусть в задаче $\max \langle c, x\rangle$, $Ax \leqslant b$, все элементы a_{ij} матрицы A и координаты b_i, c_j векторов b, c — целые; $h = \max\limits_{i,\, j}\{|a_{ij}|,$

$|b_i|, |c_j|\}$, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$. Понятно, что трудоемкость решения зависит от чисел m, n, h.

Верно ли, что трудоемкость решения произвольной задачи линейного программирования оценивается сверху полиномом от переменных m, n, h?

Упомянутые выше факты заставляли предположить отрицательный ответ на этот вопрос. Поэтому опубликованная в 1979 г. работа советского математика Л. Г. Хачияна «Полиномиальный алгоритм в линейном программировании» [27] произвела настоящую сенсацию. В этой статье к задачам линейного программирования применен принципиально новый алгоритм (так называемый метод эллипсоидов), построенный усилиями советских ученых А. С. Немировского, Н. З. Шоша и Д. Б. Юдина, и доказана теорема, которую можно сформулировать следующим образом (для произвольных функций $f(\xi)$, $g(\xi)$ будем писать $f = O(g)$, если существует такая константа K, что $f(\xi) \leqslant Kg(\xi)$ для всех ξ).

Теорема 1. *Для решения задачи линейного программирования достаточно $O(n^4(n+m)\ln hn)$ элементарных операций (сложение, вычитание, умножение, деление, извлечение квадратного корня, нахождение наибольшего из двух чисел). При этом достаточна точность (число разрядов) вычислений $O(n \ln hn)$.*

К сожалению, мы не можем привести здесь достаточно подробное изложение метода эллипсоидов, ограничимся лишь общим описанием Л. Г. Хачияном в [28] несложно показано, что для решения задачи линейного программирования достаточно иметь алгоритм, позволяющий выяснять совместность или несовместность произвольной системы неравенств вида

$$Ax \leqslant b. \tag{1}$$

Именно для решения такого вопроса и применяется метод эллипсоидов. Основой являются следующие соображения. Пусть δ — максимум модуля миноров расширенной матрицы системы (1). Из известного неравенства Адамара вытекает следующее соотношение между δ и h:

$$\ln \delta n \leqslant n \ln hn.$$

Лемма 1. *Если система (1) совместна, то в шаре $E_0 = \{x \mid \|x\| \leqslant \delta\sqrt{n}\}$ найдется ее решение.*

Доказательство. Понятно, что достаточно рассмотреть случай, когда ранг матрицы A равен n — числу переменных. Возьмем тогда какую-нибудь крайнюю точку $\bar{x}$ множества решений (1). По теореме 2.18 и согласно правилу Крамера координаты $\bar{x}_j$ точки $\bar{x}$ имеют вид $\bar{x}_j = \Delta_j/\Delta$, где Δ_j, $\Delta \neq 0$,— некоторые миноры расширенной матрицы системы. Тогда $|\Delta_j| \leqslant \delta$, $|\Delta| \geqslant 1$ в силу целочисленности коэффициентов и $|\bar{x}_j| \leqslant \delta$.

Таким образом, если система (1) совместна, то лемма 1 позволяет локализовать по крайней мере одно из ее решений. Введем в рассмотрение функцию $\theta(x) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant m}\{(Ax)_i - b_i\}$ — невязку в точке $x \in \mathbb{R}^n$. Обозначим $x^0 = 0$ центр шара (эллипсоида E_0). Если $\theta(x^0) \leqslant 0$, то x^0 — решение системы (1). В противном случае (если

$\theta(x^0) > 0$) пусть s таково, что $\theta(x^0) = \langle a_s, x^0\rangle - b_s$. Это значит, что x^0 не удовлетворяет s-му неравенству в системе (1). Понятно, что всякий вектор x, удовлетворяющий этому неравенству, обязан лежать в полупространстве $\langle a_s, x\rangle > \leqslant < \langle a_s, x^0\rangle$. Пересечение Q_0 этого полупространства с E_0 представляет собой полуэллипсоид (так как гиперплоскость $\langle a_s, x\rangle = \langle a_s, x^0\rangle$ проходит через центр E_0). Из предыдущих рассуждений вытекает, что Q_0 должно содержать решение системы (1). С тем чтобы алгоритм был устроен единообразно на всех итерациях, опишем около Q_0 эллипсоид E_1 возможно меньшего объема и затем повторим предыдущие построения с эллипсоидом E_1 и его центром x^1. Отметим очевидное сходство этого алгоритма с процессом деления отрезка пополам. Формальные выкладки выглядят следующим образом. Произвольный эллипсоид E в $\mathbf{R}^n$ можно задать формулой $E = \{y \mid y = x + Bz,\ \|z\| \leqslant 1\}$, где x — центр эллипсоида, B — некоторая $n \times n$-матрица. К началу k-й итерации метода эллипсоидов имеются центр x^k очередного эллипсоида и соответствующая матрица B_k. Итерация с номером $k = 1, 2, \ldots$ состоит в следующем:

1. Вычисляется невязка $\theta(x^k)$ для вектора x^k. Если $\theta(x^k) \leqslant 0$, то x^k — решение задачи и вычисления прекращаются. В противном случае отыскивается индекс s, для которого $\theta(x^k) = \langle a_s, x^k\rangle - b_s$.

2. Находится вектор $\eta_k — B_k' a_s$. Если $\eta_k = 0$, то вычисления прекращаются. В противном случае формируется матрица Γ_k, элемент с номером (i, j) которой равен числу $(\eta_k)_i \cdot (\eta_k)_j$.

3. Определяется новый эллипсоид по формулам

$$x^{k+1} = x^k - \frac{1}{(n+1)\|\eta_k\|} B_k' \eta_k,$$

$$B_{k+1} = \left(1 + \frac{1}{16n^2}\right) \frac{n}{(n^2-1)^{1/2}} \left\{ B_k + \frac{1}{\|\eta_k\|^2} \left[\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{1/2} - 1 \right] B_k \Gamma_k \right\}.$$

Отметим, что вычисления по этим формулам можно производить приближенно с указанной выше точностью, что позволяет не выходить из области рациональных чисел.

Алгоритм останавливается либо по предусмотренным причинам, либо через $O(n^2 \ln \delta n)$ итераций.

Обоснование алгоритма заключается в следующих утверждениях.

Л е м м а 2. *Если система* (*1*) *несовместна, то для любой точки* $x \in \mathbf{R}^n$ $\theta(x) \geqslant 1/(2n\delta)$.

Доказательство опустим, так как оно основано на той же идее, что и в лемме 1.

Пусть $\bar{\theta} = \min\limits_{x \in E_0} \theta(x)$.

Т е о р е м а 2. *Пусть для задачи* (1) *метод эллипсоидов остановился после N итераций и* $\theta(x^q) = \min\limits_{1 \leqslant k \leqslant N+1} \theta(x^k)$. *Тогда* $\theta(x^q) \leqslant \bar{\theta} + 1/(4n\delta)$.

Доказательство, довольно кропотливое, см. в [28].

Л е м м а 3. *Система* (1) *совместна тогда и только тогда, когда* $\theta(x^q) \leqslant 1/(4n\delta)$.

Доказательство. Если $\theta(x^q) \leqslant 1/(4n\delta)$, то из леммы 2 следует, что система совместна. Пусть $\theta(x^q) > 1/(4n\delta)$. Поскольку $\bar{\theta} \geqslant \theta(x^q) - 1/(4n\delta) > 0$, то $\theta(x) > 0$ для всех $x \in E_0$. Из леммы 1 тогда следует, что система (1) несовместна.

Можно проследить появление оценки числа элементарных операций, данной в теореме. Всего итераций алгоритма требуется не более $O(n^2 \ln \delta n)$. На каждой итерации требуется $O(nm)$ операций для вычисления невязки и $O(n^2)$ операций для нахождения новой матрицы; общее число операций одной итерации, таким образом, равно $O(n(n+m))$. Следовательно, весь алгоритм требует $O(n^3(n+m)\ln \delta n)$ операций. Привлекая соотношение между δ и h, получаем требуемое.

В заключение подчеркнем, что полученные оценки указывают на более высокую эффективность метода эллипсоидов по сравнению с симплекс-методом лишь в теоретическом плане — для самых «плохих» линейных задач, далеких от реальных. На практике же симплекс-метод — по-прежнему основной инструмент в линейном программировании.

К. главе II

1. Примером служит множество всех рациональных точек отрезка $[0, 1]$.

2. Пусть $x^1, x^2 \in X$, $x \in [x^1, x^2]$. Деля отрезок, содержащий точку x, пополам, и учитывая, что концы отрезка принадлежат X, получаем последовательность точек (например, левых концов получающихся отрезков), принадлежащих X и сходящихся к x. Из замкнутости X имеем, что $x \in X$.

3. Пусть $(x_1, y_1) \in X$, $(x_2, y_2) \in X$, $\alpha, \beta \geqslant 0$, $\alpha + \beta = 1$. Надо доказать, что $\alpha y_1 + \beta y_2 \geqslant 1/(\alpha x_1 + \beta x_2)$, учитывая, что $y_1 \geqslant 1/x_1$, $y_2 \geqslant 1/x_2$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$. Отсюда $\alpha y_1 \geqslant \alpha/x_1$, $\beta y_2 \geqslant \beta/x_2$, или $\alpha y_1 + \beta y_2 \geqslant \alpha/x_1 + \beta/x_2$.
Достаточно убедиться в выполнении неравенства $\alpha/x_1 + \beta/x_2 \geqslant 1/(\alpha x_1 + \beta x_2)$, или $\alpha^2 + \alpha\beta(x_1/x_2 + x_2/x_1) + \beta^2 \geqslant 1$. Так как $x_1/x_2 + x_2/x_1 \geqslant 2$, то $\alpha^2 + \alpha\beta(x_1/x_2 + x_2/x_1) + \beta^2 \geqslant \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 = 1$.

4. Возьмем точку $(5, 1/5)$, принадлежащую гиперболе, т. е. границе множества X, и построим касательную к гиперболе в этой точке. Для этого воспользуемся формулой $(y - y_0)/(x - x_0) = f'(x_0)$ уравнения касательной к кривой $y = f(x)$ в точке (x_0, y_0). Получаем уравнение прямой $x/5 + 5y = 2$. Подставляя в это уравнение координаты точки $(5, 0)$, имеем $(1/5)5 + 5 \cdot 0 < 2$. Осталось показать, что $x/5 + 5y \geqslant 2$ для всякой точки $(x, y) \in X$. Так как $y \geqslant 1/x$, то $x/5 + 5y \geqslant x/5 + 5/x \geqslant 2\sqrt{x/5\,(5/x)} = 2$. Здесь мы воспользовались неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим двух положительных чисел.

5. Предположим противное, и пусть $x^1, x^2 \in X$, $x^0 \in [x^1, x^2]$, $x^0 \notin X$. Построим гиперплоскость $\langle p, x\rangle = c$, отделяющую x^0 от X: $\langle p, x^0\rangle > c$, $\langle p, x\rangle \leqslant c$, $x \in X$. Пусть $x^0 = \alpha x^1 + \beta x^2$, где $\alpha, \beta \geqslant 0$, $\alpha + \beta = 1$. Складывая неравенства $\langle p, x^1\rangle \leqslant c$, $\langle p, x^2\rangle \leqslant c$ с коэффициентами α и β, получаем $\langle p, x^0\rangle \leqslant c$, что противоречит уравнению гиперплоскости $\langle p, x\rangle = c$.

6. Пусть $x^1, x^2 \in X$, $b = x^1/2 + x^2/2$. Тогда

$$\|b - a\| = \|(x^1 - a)/2 + (x^2 - a)/2\| \leqslant \|x^1 - a\|/2 + \|x^2 - a\|/2 \leqslant \|b - a\|.$$

Здесь мы воспользовались неравенством треугольника и тем, что $\|x^i - a\| \leqslant \|b - a\|$. Полученная цепочка неравенств показывает, что

$$\|x^1 - a\| = \|b - a\| = \|x^2 - a\|,$$
$$\|(x^1 - a) + (x^2 - a)\| = \|x^1 - a\| + \|x^2 - a\|.$$

Из последнего равенства и свойств нормы следует, что $x^1 - a = \lambda(x^2 - a)$, где $\lambda > 0$. С учетом того, что длины векторов $x^1 - a$ и $x^2 - a$ равны, получаем $\lambda = 1$, т. е. $x^1 = x^2$, откуда получаем, что b — крайняя точка.

7. Пересечение гиперплоскости и выпуклого компакта является выпуклым компактом. Согласно упражнению 6 это пересечение обладает крайними точками. Очевидно, что крайние точки пересечения являются крайними и в исходном выпуклом компакте.

8. Пример на плоскости: надграфик положительной части гиперболы (см. упр. 3) и прямая $y = 0$.

9. Пусть $\langle p^1, x\rangle = c_1$, $\langle p^2, x\rangle = c_2$ таковы, что $\langle p^1, x^0\rangle = c_1$, $\langle p^2, x^0\rangle = c_2$, $\langle p^1, x\rangle \leqslant c_1$, $\langle p^2, x\rangle \leqslant c_2$ для любого $x \in X$. Нетрудно убедиться, что произвольная гиперплоскость $\langle p, x\rangle = c$, где $p = \alpha p^1 + \beta p^2$, $c = \alpha c_1 + \beta c_2$, $\alpha + \beta = 1$, α, $\beta \geqslant 0$, является опорной к X в точке x^0.

10. Пусть $x = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i x^i$, где $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i = 1, \alpha_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Очевидно, что $\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i \begin{pmatrix} 1 \\ x^i \end{pmatrix}$. Применяя лемму 2.1 к точкам $\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ x^i \end{pmatrix}$, $i = 1, 2, \ldots, k$, в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, получаем, что точку $\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$ можно выразить в виде линейной комбинации $n + 1$ точки

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = \sum_{s=1}^{n+1} \beta_s \begin{pmatrix} 1 \\ x^{i_s} \end{pmatrix},$$

где $\sum\limits_{s=1}^{n+1} \beta_s = 1$, $\beta_s \geqslant 0$, $s = 1, 2, \ldots, n + 1$ Тогда $x = \sum\limits_{s=1}^{n+1} \beta_s x^{i_s}$.

11. Проверяется непосредственно определение 2.6 выпуклого конуса.

12. Пусть p^1, $p^2 \in K^*$, α, $\beta \geqslant 0$. Если $x \in K$ — произвольный вектор, то $\langle x, \alpha p^1 + \beta p^2\rangle = \alpha\langle x, p^1\rangle + \beta\langle x, p^2\rangle \leqslant 0$, так как $\langle x, p^1\rangle \leqslant 0$, $\langle x, p^2\rangle \leqslant 0$.

13. Если $p \in K^*$, то $\langle e^i, p\rangle \leqslant 0$, $\langle -e^i, p\rangle \leqslant 0$, где e^i — i-й орт пространства $\mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Следовательно, $K^* = 0$.

14. Ясно, что $K^+ \supseteq K^*$. Пусть $p \in K^+$, $x \in K$. Тогда

$$x = \sum_{i=1}^{k} \beta_i x^i, \ \langle p, x\rangle = \sum_{i=1}^{k} \beta_i \langle p, x^i\rangle \leqslant 0, \text{ т. е. } K^+ \subseteq K^*.$$

15. Согласно упр. 14 K^* можно задать системой линейных неравенств $\langle x^i, p\rangle \leqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$, где x^i, $i = 1, 2, \ldots, k$,— образующие многогранного конуса K. По теореме 2.19 имеем, что K^* — выпуклый многогранный конус.

16. По следствию из теоремы 2.13 $K = K^{**}$, поэтому достаточно применить утверждение упр. 14.

17 Пусть K — наименьший выпуклый конус, содержащий множество M. Поскольку Co (M) является выпуклым конусом и пересечение выпуклых конусов само является таковым, то Co $M \supseteq$

$\supseteq K$. Вместе с тем, по определению выпуклого конуса, K содержит все неотрицательные линейные комбинации элементов множества M, т. е. $K \supseteq \mathrm{Co}(M)$.

К главе III

1. Ясно, что рассматриваемая задача допустима — вектор $x = 0$ является ее планом. Покажем, что двойственная задача

$$\min \langle b, p \rangle$$
$$A'p \geqslant c, \quad p \geqslant 0$$

также допустима. Пусть $e = (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^m$. Тогда

$$A'e = \left(\sum_{i=1}^m a_{i1}, \sum_{i=1}^m a_{i2}, \ldots, \sum_{i=1}^m a_{in} \right)$$

и, как следует из условий на матрицу A, все координаты этого вектора положительны. В таком случае для достаточно большого $\lambda > 0$ будет выполнено условие $\lambda A'e \geqslant c$, т. е. вектор $p = \lambda e$ допустим для двойственной задачи. Поскольку и прямая и двойственная задача допустимы, то согласно теореме двойственности они обе имеют решения.

2. Вариант 1. Пусть $X = \{x | Ax \leqslant 0\}$. Если для всех $x \in X$ выполняется неравенство $\langle c, x \rangle \leqslant 0$, то ясно, что $x = 0$ — решение данной задачи. Если же существует такой вектор $x^0 \in X$, что $\langle c, x^0 \rangle > 0$, то рассматриваемая задача не имеет решения — любой вектор вида λx^0, где $\lambda > 0$, принадлежит X, и значение $\lambda \langle c, x^0 \rangle$ может быть как угодно большим.

Вариант 2. Задача $D(0, c)$ разрешима вместе с задачей $\Pi(0, c)$. Поскольку целевая функция в $D(0, c)$ задается нулевым вектором, то ее значение, а значит, и значение задачи $\Pi(0, c)$, равно нулю. Следовательно, если $\Pi(0, c)$ имеет решение, то $x = 0$ — оптимальный план.

3. Пусть x^0 — допустимый вектор исходной задачи линейного программирования, p^0 — допустимый вектор двойственной задачи. Непосредственно проверяется, что эти же векторы допустимы для прямой и двойственной задачи с измененным b'.

4. Построим двойственную задачу:

$$\max (p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \ldots + np_n)$$
$$\begin{aligned} p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n &\leqslant 1, \\ p_2 + p_3 + \ldots + p_n &\leqslant 2, \\ p_3 + \ldots + p_n &\leqslant 3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ p_n &\leqslant n, \end{aligned}$$
$$p_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Очевидно, что прямая и двойственная задачи допустимы, следовательно, имеют решения. Из условий неотрицательности вытекает, что для любого допустимого вектора $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ (а значит, и для решений двойственной задачи) все ограничения, кроме первого, будут выполнены в виде строгого неравенства $\sum_{i=k}^{n} p_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} p_i \leqslant 1 < k$. По теореме равновесия, в любом решении $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ прямой задачи будет $x_j^* = 0$, $j = 2, \ldots, n$. Отсюда уже легко получить единственное решение прямой задачи $x^* = (n, 0, 0, \ldots, 0)$.

5. Из условий b, $a_j > 0$ следует, что допустимое множество $X = \left\{x \mid x \geqslant 0, \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leqslant b\right\}$ непусто и ограничено, следовательно, является выпуклым многогранником. Нетрудно убедиться, что все крайние точки этого многогранника имеют вид $(0, 0, \ldots, 0, b/a_j, 0, \ldots, 0)$. Среди крайних точек оптимальными являются лишь те, для которых $c_k b/a_k = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} (c_j b/a_j)$. Если такой индекс k — единственный, то и решение задачи единственно. Это, в частности, имеет место, когда все числа $c_j b/a_j$ различны. Пусть $\sigma = \{k_1, k_2 \ldots \ldots, k_q\}$ — множество индексов k_r, $1 \leqslant k_r \leqslant n$, $r = 1, 2, \ldots, q$, для которых $c_{k_r} b/a_{k_r} = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} (c_j b/a_j)$. Тогда векторы

$x^r = \left(0, 0, \ldots, 0, b/a_{k_r}, 0, \ldots, 0\right)$, $r = 1, 2, \ldots, q$, исчерпывают все крайние точки многогранника решений. Поэтому произвольное решение задачи имеет вид $x = \sum_{r=1}^{q} \alpha_r x^r$, где $\alpha_r \geqslant 0$, $r = 1, 2, \ldots, q$, $\sum_{r=1}^{q} \alpha_r = 1$, т. е.

$$x = \left(0, \ldots, 0, \alpha_1 b/a_{k_1}, 0, \ldots, \alpha_2 b/a_{k_2}, \ldots, 0, \alpha_q b/a_{k_q}, 0, \ldots, 0\right).$$

6. Рассмотрим двойственную задачу

$$\min\,(-4p_1 + 2p_2 + 8p_3)$$

$$-\mu p_1 + 2p_2 + 3\mu p_3 = 1, \quad -p_1 - p_2 - p_3 = 3\lambda, \quad p_1,\ p_2,\ p_3 \geqslant 0.$$

Поскольку для плана $x^0 = (0, 4)$ второе и третье ограничение прямой задачи выполняется в виде строгого неравенства, то для оптимальности этого плана необходимо и достаточно, чтобы у двойственной задачи нашелся план вида $p = (p_1, 0, 0)$. Тогда $-\mu p_1 = 1$, $-p_1 = 3\lambda$. Отсюда имеем $\mu < 0$, $\lambda < 0$ и $3\lambda\mu = 1$.

7. Из условия вытекает, что неравенства $\langle c, x\rangle \leqslant d$ и $\langle c, x\rangle \geqslant d$ являются следствием системы неравенств $Ax \leqslant b$, $-Ax \leqslant -b$.

Согласно теореме 2.25 существует такой неотрицательный $2m$-мерный вектор (u, v), что $A'u - A'v = c$ и $\langle b, u\rangle - \langle b, v\rangle \leqslant d$. Обозначив $p = u - v \in \mathrm{R}^m$, получим $c = A'p$ и $\langle b, p\rangle \leqslant d$. Покажем, что $\langle b, p\rangle = d$. Пусть x — произвольный вектор, для которого $Ax = b$. Тогда $\langle c, x\rangle = \langle A'p, x\rangle = \langle p, Ax\rangle = \langle p, b\rangle$. С другой стороны, $\langle c, x\rangle = d$ (так как данное уравнение, по условию,— следствие системы $Ax = b$). Таким образом, $\langle p, b\rangle = d$.

8. Пусть $Ax^0 < 0$, $A'p^0 > 0$, $p^0 \geqslant 0$. Тогда прямая задача допустима, поскольку вектор λx^0 при достаточно большом $\lambda > 0$ удовлетворяет ограничению.

Точно так же вектор μp^0 допустим для двойственной задачи при любом c и достаточно большом $\mu > 0$. По теореме двойственности заключаем, что обе задачи имеют решения при любых b и c.

Наоборот, пусть рассматриваемая задача имеет решение при любых b и c. Тогда это же верно и для двойственной задачи. Возьмем $b < 0$, $c > 0$ и произвольные допустимые векторы x^0 и p^0. Тогда $Ax^0 < 0$, $A'p^0 > 0$.

9. В качестве вектора c можно взять вектор a_i. Действительно, для любого $x \in X$ выполняется неравенство $\langle a_i, x\rangle \leqslant b_i$, в то время как $\langle a_i, x^0\rangle = b_i$, т. е. $\langle a_i, x\rangle \leqslant \langle a_i, x^0\rangle$ для всех $x \in X$.

10. Согласно упр. 9, C_{x^0} содержит ненулевые векторы. Пусть $c^1, c^2 \in C_{x^0}$, $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$. Нужно показать, что $\alpha c^1 + \beta c^2 \in C_{x^0}$, т. е., что $\langle \alpha c^1 + \beta c^2, x^0\rangle \geqslant \langle \alpha c^1 + \beta c^2, x\rangle$ для всякого $x \in X$.

Однако из включений $c^1, c^2 \in C_{x^0}$ вытекает, что

$$\langle c^1, x^0\rangle \geqslant \langle c^1, x\rangle,\ \langle c^2, x^0\rangle \geqslant \langle c^2, x\rangle\ \forall x \in X.$$

Теперь нужно лишь умножить эти неравенства соответственно на α и β и сложить.

11. Пусть b^1, $b^2 \in B_c$, α, $\beta \geqslant 0$, $\alpha + \beta = 1$, $b = \alpha b^1 + \beta b^2$. Надо доказать, что $b \in B_c$. Для этого достаточно убедиться в том, что задачи (3.2) и (3.4) допустимы. Задача (3.4), очевидно, допустима, поскольку в ней множество P не зависит от b, а при целевой функции $\langle b^1, p\rangle$ она, по предположению, допустима. Обозначим через $X(b)$ допустимое множество задачи (3.2). Пусть $x^1 \in X(b^1)$, $x^2 \in X(b^2)$. Тогда $\alpha x^1 + \beta x^2 \in X(b)$, так как $A(\alpha x^1 + \beta x^2) = \alpha Ax^1 + \beta Ax^2 \leqslant \alpha b^1 + \beta b^2 = b$.

12. В обозначениях упр. 11, $b \in B_c$, $b + \lambda s \in B_c$.

Покажем, что $b + \lambda' s$ является выпуклой линейной комбинацией этих векторов. Положим $\beta = \lambda'/\lambda$, $\alpha = 1 - \beta$. Тогда $\alpha b + \beta(b + \lambda s) = b + \lambda' s \in B_c$.

13. Пусть задача $\Pi(b + \lambda s^0, c)$ имеет решение, s — произвольное направление. Очевидно, что существует $\mu > 0$ такое, что $\mu s \geqslant \lambda s^0$. Тогда $b + \mu s \geqslant b + \lambda s^0$. Согласно упр. 3 задача $\Pi(b + \mu s, c)$ имеет решение. Упражнение 12 утверждает, что задача $\Pi(b + \gamma s, c)$ имеет решение при всех $0 \leqslant \gamma \leqslant \mu$.

14. Пусть направление s таково, что $\langle s, p\rangle \geqslant 0$ для всякого $p \in K^{P^0}$. Рассмотрим представление $P = M^P + K^P$ для допустимого множества задачи $D(b, c)$. Поскольку эта задача по предположению имеет решение, то $\langle b, p\rangle = 0$ для всякого $p \in K^{P^0}$ и $\langle b, p\rangle > 0$ для всякого $p \in K^P \setminus K^{P^0}$. Пусть $p^1, p^2, \ldots, p^r$ — все крайние лучи многогранного конуса K^P, не принадлежащие K^{P^0}. Выберем число $\lambda > 0$ таким, чтобы выполнялись неравенства $\langle b, p^i\rangle \geqslant -\lambda\langle s, p^i\rangle$, $i = 1, 2, r$. Поскольку любой вектор $p \in K^P$ допускает представление

$$p = \sum_{i=1}^{r} p^i + \sum_{j=1}^{l} p^j,$$

где

$$p^i \in K^P \setminus K^{P^0},$$

$$i = 1, 2, \ldots, r, \; p^j \in K^{P^0}, \; j = 1, 2, \ldots, l,$$

то $\langle b + \lambda s, p\rangle = \sum_{i=1}^{r} \langle b, p^i\rangle + \lambda \sum_{i=1}^{r} \langle s, p^i\rangle +$

$$+ \sum_{j=1}^{l} \langle b, p^j\rangle + \sum_{j=1}^{l} \lambda \langle s, p^j\rangle.$$

Учитывая, что по условию $\langle s, p^j\rangle \geqslant 0$, $\langle b, p^j\rangle \geqslant 0$, $j = 1, 2, \ldots, l$, получаем $\langle b + \lambda s, p\rangle \geqslant 0$ для всех $p \in K^P$. Пусть d — значение задачи $D(b, c)$. Тогда ясно, что $\langle p, b + \lambda s\rangle \geqslant d$ для всех $p \in P$. По теореме 3.1 заключаем, что задача $D(b + \lambda s, c)$ (а значит, и $\Pi(b + \lambda s, c)$) имеет решение.

Наоборот, допустим, что $\langle s, \bar{p}\rangle < 0$ для некоторого $\bar{p} \in K^{P^0}$. Пусть $p^* \in M^P$. Рассмотрим векторы вида $p^* + \mu \bar{p}$ при $\mu > 0$. Тогда $\langle b + \lambda s, p^* + \mu \bar{p}\rangle = \langle b, p^*\rangle + \lambda\langle s, p^*\rangle + \lambda\mu\langle s, \bar{p}\rangle$ (так как $\langle b, \bar{p}\rangle = 0$). Отсюда видно, что в данном случае целевая функция задачи $D(b + \lambda sc)$ неограничена снизу при любом λ и при μ, стремящемся к ∞.

15. Взяв в качестве направления s векторы $\pm v^i$, из упр. 14 получаем, что $\langle v^i, p\rangle = p_i \geqslant 0$, $\langle -v^i, p\rangle = -p_i \geqslant 0$, т. е. $p_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, для любого $p = (p_1, p_2, \ldots, p_m) \in K^{P^0}$. Это означает, что $K^{P^0} = 0$ и что множество P^0 совпадает с многогранником M^{P^0}.

16. Согласно утверждению упр. 14 $\langle s, p\rangle \geqslant 0$ для всех $p \in K^{P^0}$. Из следствия 1 теоремы 3.10 получаем, что достаточно доказать равенство

$$\min_{p \in P^0} \langle s, p\rangle = \min_{1 \leqslant i \leqslant k} \langle s, p^i\rangle,$$

где $p^1, p^2, \ldots, p^k$ — все крайние точки многогранника M^{P^0}. Всякий вектор $p \in P^0$ допускает представление $p = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i p^i + \bar{p}$, где $\bar{p} \in K^{P^0}$. Тогда

$$\langle s, p\rangle = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \langle s, p^i\rangle + \langle s, \bar{p}\rangle \geqslant \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \langle s, p^i\rangle,$$

откуда и следует требуемое утверждение $\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1,\ \alpha_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, k\right)$.

17. Утверждение непосредственно вытекает из упр. 16.

18. Согласно теории двойственности, если прямая задача имеет решение, то и двойственная к ней:

$$\min\langle b,\ p\rangle$$

$$A'p = c,$$

также имеет решение p^*. Пусть x^0 — произвольный допустимый вектор прямой задачи. Тогда $\langle b,\ p^*\rangle = \langle Ax^0,\ p^*\rangle = \langle x^0,\ A'p^*\rangle = \langle x^0,\ c\rangle$. Следовательно, значение целевой фнукции постоянно на всем множестве допустимых векторов.

19. Выпуклость функции $x_1^2 + x_2^2$ доказывается так же, как выпуклость круга (см. гл. II). Докажем выпуклость функции $\sqrt{x_1 + x_2}$. Для этого достаточно убедиться в выполнении неравенства

$$\sqrt{\alpha x_1 + \alpha x_2 + \beta y_1 + \beta y_2} \geqslant \alpha\sqrt{x_1 + x_2} + \beta\sqrt{y_1 + y_2}$$

для любых $\alpha,\ \beta \geqslant 0,\ \alpha + \beta = 1$. С учетом неотрицательности всех слагаемых этого неравенство эквивалентно следующему:

$$\alpha x_1 + \alpha x_2 + \beta y_1 + \beta y_2 \geqslant$$
$$\geqslant \alpha^2(x_1 + x_2) + 2\alpha\beta\sqrt{(x_1 + x_2)(y_1 + y_2)} + \beta^2(y_1 + y_2).$$

Воспользовавшись неравенством о среднем арифметическом и среднем геометрическом, получаем, что правая часть неравенства, которое нужно доказать, не превосходит величины $\alpha^2(x_1 + x_2) + \alpha\beta(x_1 + x_2 + y_1 + y_2) + \beta^2(y_1 + y_2)$. Вспомнив, что $\alpha + \beta = 1$, убеждаемся, что полученная величина совпадает с выражением в левой части неравенства.

К главе IV

1. Непосредственно проверяется, что седловой точкой является пара стратегий $(n,\ n)$.

2. Согласно лемме 4.2 стратегия x^0 является гарантирующей для первого игрока, если она обеспечивает ему выигрыш не менее цены игры v при использовании вторым игроком любой своей чистой стратегии. С учетом этого получаем, что множество X^0 оптимальных стратегий первого игрока задается системой условий

$$A'x \geqslant v_n,\quad \langle x,\ e\rangle = 1,\quad x \geqslant 0,$$

где v_n — n-мерный вектор, все координаты которого равны v, e — m-мерный вектор, все координаты которого равны 1.

3. Утверждение следует из неравенства (4.7).

4. Очевидно, что если S — изолированное подмножество, соответствующее матрице A, то $N\setminus S$ — изолированное подмножество для A'.

5. Утверждение непосредственно вытекает из теоремы Фробениуса — Перрона.

6. Неверно, так как, например, матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ неразложима, а матрица $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ разложима.

7. Свойство $\lambda_A = \lambda_{A'}$ вытекает из характеристики числа λ_A как наибольшего неотрицательного собственного числа матрицы A и из того, что собственные числа матриц A и A' совпадают.

Свойство $\lambda_{A^h} = \lambda_A^h$ следует из того, что каждое собственное число матрицы A^h имеет вид λ^h, где λ — некоторое собственное число матрицы A, и из того, что $|\lambda| \leqslant |\lambda_A|$.

Свойство $\lambda_{\alpha A} = \alpha\lambda_A$ получается аналогично.

Чтобы доказать последнее свойство, воспользуемся характеристикой числа λ_A как нуля монотонно убывающей функции $u(\lambda)$ (см. формулу (4.16)). Понятно, что если $B \geqslant A$, то для соответствующей функции $u_B(\lambda)$ имеем неравенство $u_B(\lambda) \geqslant u(\lambda)$, откуда и получаем, что нуль λ_B функции $u_B(\lambda)$ лежит правее нуля λ_A функции $u(\lambda)$.

8. Пусть матрица A разложима, причем $S \subseteq N$ — изолированное подмножество. Тогда для любых $i \in S$, $j \notin S$ последовательность, указанная в упражнении, существовать не может. В самом деле, в такой последовательности обязательно должен встретиться элемент $a_{i_t i_{t+1}}$, где $i_t \in S$, $i_{t+1} \notin S$, а по определению множества S он должен равняться нулю.

Наоборот, пусть матрица A неразложима, однако имеются индексы i_0, j_0, которые нельзя соединить последовательностью, указанной в упражнении. Обозначим через S множество всех таких индексов, которые можно соединить с i_0 аналогичной последовательностью. Поскольку $j_0 \notin S$, то $S \neq N$. Если предположить, что $S = \varnothing$, то это означает, что строка a_i в матрице A нулевая, чего, очевидно, не может быть в неразложимой матрице. Нетрудно видеть, что S — изолированное подмножество, так как если $i \in S$, $j \notin S$, то элемент $a_{ij} = 0$. Действительно, если $a_{ij} > 0$, то взяв последовательность, соединяющую i_0 и i и присоединив к ней элемент j, получим последовательность, соединяющую i_0 и j, что невозможно согласно выбору $j \notin S$. Наличие изолированного подмножества S в матрице A, предполагаемой неразложимой, дает противоречие, доказывающее нужное утверждение.

9. Поскольку $\bar{x}^T = x^T$, и поэтому число $\langle c, \bar{x}^T \rangle$ равно значению задачи, то для доказательства утверждения достаточно показать, что траектория $\{\bar{x}^t\}$ удовлетворяет ограничениям задачи (4.26). Действительно,

$$A\bar{x}^t = AA^{T-t}x^T = A^{T-(t-1)}x^T = \bar{x}^{t-1},$$

$$t = 2, 3, \ldots, T, \quad A\bar{x}^1 = A^T x^T \leqslant x^0.$$

Последнее неравенство легко получается из условий задачи (4.27).

10. Отметим, что в этой задаче не наложено условие неотрицательности на переменные. Поэтому в двойственной задаче ограничения носят характер равенств:

$$\min \langle x^0, p^0 \rangle$$

$$p^{t+1} = A'p^t, \quad t = 0, 1, \ldots, T-1,$$

$$\langle p^T, \hat{x} \rangle = 1, \; p_t \geqslant 0, \quad t = 0, 1, 2, \ldots, T.$$

Дальнейшие рассуждения аналогичны ходу доказательства в тексте.

11. Непосредственно проверяется, что если матрица A имеет вид (4.27), то

$$A^m = \begin{pmatrix} \bar{A} & 0 & 0 \dots 0 & 0 \\ 0 & \bar{A} & 0 \dots 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \dots 0 & \bar{A} \end{pmatrix},$$

где $\bar{A} = A_0 A_1 \dots A_{m-1}$.

12. Допустим противное. Тогда найдется последовательность x^k, для которой $\|x^k\| = 1$, $Ax^k < x^k$, и индекс j, для которого $\lim\limits_{k\to\infty} x_j^k = 0$. Последовательность x^k можно считать сходящейся. Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} x^k = x^0$ Тогда $Ax^0 \leqslant x^0$ и равенство $x_j^0 = 0$ противоречит следствию из леммы 4.5.

К главе V

1. Утверждение задачи очевидно, так как если $Ax = b$, то $QAx = Qb$, и наоборот, если $QAx = Qb$, то $Q^{-1}QAx = Q^{-1}Qb$, т. е. $Ax = b$.

2. Вычтем каждое уравнение второй системы из соответствующего уравнения первой:

$$\sum_{j\in\omega} (\alpha_{ij} - \beta_{ij}) x_j = \alpha_{i0} - \beta_{i0}, \qquad i \in \sigma.$$

Поскольку переменные x_j, $j \in \omega$,— свободные, то полученные равенства должны удовлетворяться при произвольных значениях x_j, $j \in \omega$, откуда и следует нужное утверждение.

3. Рассмотрим точку вида $x = \alpha x^1 + (1-\alpha)x^2$, где $0 < \alpha \leqslant 1$. Тогда

$$\langle c, x\rangle = \alpha\langle c, x^1\rangle + (1-\alpha)\langle c, x^2\rangle > \\ > \alpha\langle c, x^2\rangle + (1-\alpha)\langle c, x^2\rangle = \langle c, x^2\rangle$$

при любом положительном α.

С другой стороны, расстояние между точками x и x^2 может быть сколь угодно мало при выборе достаточно маленького α:

$$\|x - x^2\| = \|\alpha x^1 + (1-\alpha)x^2 - x^2\| = \alpha\|x^1 - x^2\| \to 0$$

при $\alpha \to 0$.

4. Пусть $x^* \in X$ — локальный максимум в задаче линейного программирования и предположим, что он не является глобальным, т. е. существует точка $\tilde{x} \in X$, для которой $\langle c, \tilde{x}\rangle > \langle c, x^*\rangle$. Согласно упр. 3 в любой окрестности точки x^* найдется точка $x \in X$, для которой $\langle c, x\rangle > \langle c, x^*\rangle$. Это противоречит определению локального максимума.

5. Если $L_1 = L_2$ и $x^1 - x^2 = l \in L_1$, то

$$P_2 = x^2 + L_2 = x^1 - l + L_1 = x^1 + L_1 = P_1.$$

Наоборот, пусть $P_1 = P_2$. Тогда $x^2 = x^1 + l$, где $l \in L_1$, т. е. $x^1 - x^2 = -l \in L_1$. Отсюда $x^1 + L_1 = P_1 = P_2 = x^2 + L_2 = x^1 + l + L_2$. Следовательно, $L_1 = l + L_2$, т. е. $L_1 = L_1 - l = L_2$.

6. Вектор $x = 0$ допустим для данной задачи. Поскольку двойственная задача имеет вид

$$\min \langle 0, p\rangle$$

$$A'p \geqslant c,$$

то значение d прямой задачи равно нулю, но тогда $d = 0 = \langle c, 0\rangle$.

7. В данной задаче существует единственный допустимый вектор (1, 0, 0), который и является оптимальным. Взяв в качестве базиса этого плана систему $\left\{\binom{1}{0}\ \binom{1}{1}\right\}$ столбцов матрицы ограничений, получаем следующую симплексную таблицу:

		Δ_1	Δ_2	Δ_3
$\langle c, x\rangle$	1	0	0	-1
x_1	1	1	0	-1
x_2	0	0	1	1

в которой $\Delta_3 < 0$.

8. Пусть направление s допустимо в точке x^0. Тогда 1) $x^0 + \lambda s \geqslant 0$, 2) $A(x^0 + \lambda s) = b$. Из 1) получаем $Ax^0 + \lambda As = b + \lambda As = b$, т. е. $\lambda As = 0$, откуда $As = 0$. Если $x_j^0 = 0$, то из условий $\lambda > 0$ и 2) получаем, что $s_j = 0$. Обратное утверждение очевидно.

9. Пусть $\langle c, s\rangle \leqslant 0$ для любого направления s, допустимого в точке x^0. Пусть $x \in X$ — произвольная точка. Точка $x^0 + \lambda(x - x^0)$ при любом λ, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, принадлежит X в силу его выпуклости. Следовательно, направление $s = x - x^0$ допустимо в точке x^0. Тогда $0 \geqslant \langle c, x - x^0\rangle = \langle c, x\rangle - \langle c, x^0\rangle$, т. е. $\langle c, x^0\rangle \geqslant \langle c, x\rangle$. Обратное утверждение состоит в том, что глобальный максимум является локальным, и поэтому тривиально.

10. Пусть s — произвольное направление, допустимое в точке x^0, $\sigma = \{j \mid x_j^0 = 0\}$ Как следует из упр. 8, 9, имеет место импликация:

$$As \leqslant 0, \quad -As \leqslant 0, \quad \langle s, e^j\rangle \geqslant 0, \quad j \in \sigma \Rightarrow \langle c, s\rangle \leqslant 0.$$

Теорема 2.27 утверждает, что в таком случае существует неотрицательное решение системы уравнений $Au - Av - w = c$, где $w_j = 0$, если $j \notin \sigma$ Обозначив $p^0 = u - v$, получаем требуемое утверждение. Наоборот, пусть p^0 и $w \geqslant 0$ — векторы, для которых $c = A'p^0 - w$, $\langle x^0, w\rangle = 0$.

Нетрудно убедиться, что в таком случае имеет место импликация: $As = 0$, $\langle s, e^j\rangle = 0$, $j \in \sigma \Rightarrow \langle c, s\rangle \leqslant 0$, т. е. по любому направлению, допустимому в точке x^0, значение целевой функции убывает. Согласно упр. 9 x^0 — оптимальный план задачи (5.2).

11. Если $\Delta \geqslant 0$, то этот вектор можно принять за w в упр. 10, так как $\Delta = A'p^0 - c$, где, $p^0 = \left(A'_\sigma\right)^{-1} c_0$ и $\langle \Delta, x^0\rangle = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Курош А. Г. Курс высшей алгебры.— М.: Наука, 1971.
2. Мальцев А. И. Основы линейной алгебры.— М.: Наука, 1970.
3. Гольштейн Е. Г., Юдин Д. Б. Линейное программирование, теория, методы и приложения.— М.: Наука, 1969.
4. Гольштейн Е. Г., Юдин Д. Б. Новые направления в линейном программировании.— М.: Советское радио, 1966.
5. Гольштейн Е. Г., Юдин Д. Б. Задача линейного программирования транспортного типа.— М.: Наука, 1969.
6. Линейные неравенства и смежные вопросы. Сб. статей под редакцией Г. У. Куна и А. У. Таккера.— М.: ИЛ, 1959.
7. Данциг Д. Линейное программирование, его обобщения и применение.— М.: Прогресс, 1966.
8. Гасс С. Линейное программирование— М.: Физматгиз, 1961.
9. Гейл Д. Теория линейных экономических моделей.— М.: ИЛ, 1963.
10. Заславский Ю. Л. Сборник задач по линейному программированию.— М.: Наука, 1969.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

11. Stigler G. J. The cost of subsistence, Journal of Farm Economics, 1945, № 27.
12. Wangh F. V. The minimal-cost dairy feed, Journal of Farm Economics, August, 1951.
13. Александров А., Лурье А., Олейник Ю. Применение электронных вычислительных машин в оперативном планировании. Автомобильный транспорт, 1959, № 6.
14. Леонтьев В. В. Исследования структуры американской экономики.— М.: Госстатиздат, 1958.
15. Коссов В. В. Межотраслевой баланс.— М.: Экономика, 1966.
16. Гребцов Г. И., Смехов Б. М., Смоляр Л. И. Основы разработки межотраслевого баланса.— М.: Экономиздат, 1961.
17. Моделирование народнохозяйственных процессов/Под ред. В. С. Дадаяна.— М.: Экономика, 1973.
18. Канторович Л. В. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов.— М.: Изд. АН СССР, 1960.
19. Дж. фон Нейман, О. Моргенштерн. Теория игр и экономическое поведение.— М.: Наука, 1970.

20. Оуэн Г. Теория игр.— М.: Наука, 1971.
21. Бондарева О. Н. Некоторые применения методов линейного программирования и теории кооперативных игр.— Проблемы кибернетики, 1963, № 10, стр. 121—139.
22. Dorfman R., Samuelson P. A., Solow R. M. Linear programming and economic analysis — N·Y., McGrow Hill, 1958.
23. Appel K., Haken W. Every planar map is four colorable.— Bull Amer. Math. Soc., 1976, 82, № 5.
24. Корбут А. А., Финкельштейн Ю. Ю. Дискретное программирование.— М.: Наука, 1969.
25. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач.— М.: Наука, 1979.
26. Ашманов С. А. Математические модели и методы в экономике.— М.: Изд-во МГУ, 1980.
27. Хачиян Л. Г. Полиномиальный алгоритм в линейном программировании.— ДАН СССР, 1979, 244, № 5, с. 1093—1096.
28. Хачиян Л. Г. Полиномиальные алгоритмы в линейном программировании.— ЖВМ и МФ, 1980, 20, № 1, с. 51—68.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ